

Industrielle Mechanik.

Nach

Poncelet

Cours de mecanique industrielle

und dessen

Cours de mecanique appliquée aux machines,

so wie

Taffe

Application des principes de mecanique aux machines les plus en usage,

deutsch bearbeitet

und mit Anmerkungen begleitet

von

C. G. Kuppler,

Professor an der königl. polytechnischen Schule in Nürnberg.

I. Lieferung.

Langmantel

Nürnberg 1840.

Bei August Recknagel.

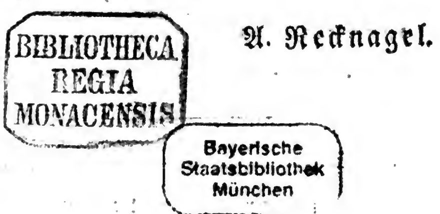
☞ Man bittet der Vorbemerkung und der Rückseite des Umschlages gefällige Aufmerksamkeit zu schenken.

Durch ein Zusammentreffen besonderer Umstände sind in dieser Lieferung nachstehend namhaft gemachte Druckfehler stehengeblieben, die man vor dem Lesen zu verbessern bittet.

Seite	Zeile	von	statt	lese man
Seite 32.	3.	Zeile von unten	statt	h lese man g.
— —	4.	— —	— —	Reifungsconficienten l. Reibungscoefficienten.
— 40.	2.	— —	oben —	cd l. ef.
— 43.	3.	— —	— —	a l. b.
— 55.	17.	— —	— —	Kurbe l. Kurve.
— 67.	7.	— —	unten —	Fig. 67. l. Fig. 68.
— 71.	11.	— —	oben —	Fig. 70 l. Fig. 72.
— 73.	3.	— —	unten —	B′ und B l. B′ und B″.
— —	7.	— —	— —	AF l. AF (Fig. 77).
— 74.	12.	— —	oben —	v l. or.
— 83.	6.	— —	unten —	Ao l. Aa.
— 88.	2.	— —	— —	weniger l. weniges.
— 89.	2 u. 3.	— —	— —	der l. dem.

In Betreff der fernern Lieferungen sind zur Beseitigung ähnlicher, Sinn entstellender Fehler die geeigneten Maßregeln genommen worden.

A. Recknagel.



Vorbemerkung.

Das Bedürfniß eines für angehende Mechaniker, Fabrik-Dirigenten, Techniker ꝛc. geeigneten Werkes, welches in einem mäßigen Umfange das Wissenswürdigste aus dem Gebiete der industriellen Mechanik enthält, und das bei consequenter Durchführung und beständiger Berücksichtigung der Anwendung zugleich billig in der Anschaffung kommt, werden alle diejenigen fühlen, die Gelegenheit hatten, angehende Practiker in ihrer ersten Entwicklungs-Periode zu beobachten. Da ich seit 17 Jahren die Mechanik an einer technischen Anstalt vortrage, aus welcher im Laufe dieser Zeit eine Anzahl Individuen hervorgingen, die jetzt als Ingenieure, Fabrik-Dirigenten, Mechaniker ꝛc placirt sind, und ich vordem eine Reihe von Jahren hindurch Maschinenbauten leitete, so boten sich mir in beiden Wirkungskreisen besondere Gelegenheiten zu ähnlichen Beobachtungen dar und veranlassten mich zuletzt, die Ausarbeitung einer industriellen Mechanik, wozu ich seit Jahren die Materialien gesammelt und vorbereitet hatte, zu unternehmen, als mir durch die Verlagshandlung des vorliegenden Werkes der Antrag zukam, für sie Poncelet's cours de mechanique industrielle ins Deutsche zu übertragen.

Dieses Werk nimmt unter den Bedeutenderen, die in den beiden letzten Jahrzehnten in Frankreich über industrielle Mechanik erschienen sind, eine würdige Stelle ein und zeichnet sich besonders dadurch aus, daß es zwischen zu großer Weitschweifigkeit und zu gedrängter Kürze die rechte Mitte hält, nur mäßige Vorkenntnisse in der Elementar-Mathematik von seinen Lesern fordert und dennoch seinen Gegenstand mit Gründlichkeit durchführt. Daß jedoch eine buchstäbliche Uebertragung desselben ins Deutsche nicht für genügend befunden werden dürfte, indem es so Manches enthält, was in dem französischen Gewande deut-

schen Practikern nicht zusagen würde und auch so Manches darin mangelt, was für dieselben unumgänglich nothwendig ist, nahm ich während der Bearbeitung der ersten Bogen desselben wahr.

Bekanntlich hat Poncelet über Mechanik zwei von einander verschiedene Werke abgefaßt, nämlich:

Cours de mechanique industrielle und

Cours de mechanique appliquée aux machines.

In Beiden sind, ausser den allgemeinen Lehren der Statik und der Dynamik, die Theile, aus denen gewöhnlich die Maschinen zusammen gesetzt sind, so wie die bewegenden Kräfte abgehandelt; dagegen finden sich in denselben keine Beispiele von vollständigen, ausgeführten, mustermäßigen Maschinen.

Diese Lücke suchte Taffe durch die Herausgabe seiner

Application des principes de mechanique aux machines les plus en usage

auszufüllen, worin derselbe, ausser einer dem Poncelet'schen Werke nachgebildeten Einleitung, von einer beträchtlichen Anzahl wirklich bestehender Maschinen, die Verhältnisse, die Berechnungen und die daraus abgeleiteten Effektsbestimmungen derselben giebt. Für den angehenden Mechaniker ꝛc. haben aber dergleichen Beispiele denselben Werth, wie für den angehenden Architekten die Muster von vollkommenen Bauwerken. Er gewinnt durch ihr Studium Takt und Geschmack; er lernt aus denselben die zweckmäßige Vereinigung einzelner Theile kennen, Fehler vermeiden und Mängel beseitigen. Da aber diese Musterbeispiele schon eine vollständige Kenntniß von den Constructionen und richtigen Formen der Maschinen-Elemente voraussetzen, so schien es mir nothwendig, die Herausgabe einer industriellen Mechanik noch mit einer Sammlung genauer und getreuer Abbildungen von den besten vorhandenen und jetzt gebräuchlichen Maschinen-Theilen zu begleiten. Ich habe daher meinen anfänglichen Plan, Poncelet mechanique industrielle ausschließend nach dem Original ins Deutsche zu übertragen, verlassen und denselben dahin erweitert, daß ich meiner begonnenen Arbeit nicht nur eine dem Practiker zusagende Form zu geben mich bemühen, sondern derselben ausser Poncelet cours de mechanique industrielle noch dessen Cours de mechanique appliquée

aux machines, so wie Taffe application de mechanique aux machines les plus en usage zu Grunde legen und dabei noch die größeren Werke von Borgnis und Christian so wie die Neueren von Coriolis und Navier benützen werde. Endlich soll diese Arbeit noch mit einer angemessenen Zahl sorgfältig ausgewählter und genau bearbeiteter Zeichnungen, welche die wesentlichsten Elemente der Maschinen darstellen, begleitet und somit ein Werk geliefert werden, das jungen Technikern, die sich besonders die Mechanik zum Berufe gewählt haben, als sicherer Führer bei ihren weitern Studien dienen kann, und das von Practikern mit Erfolg als Handbuch zu benützen ist.

— Schließlich habe ich noch zu bemerken, daß ich glaubte, im Interesse der Käufer dieses Werkes zu verfahren, wenn ich die Abtheilung, welche von den Bestandtheilen der Maschinen und den bewegenden Kräften handelt, zuerst bearbeite und herausgebe.

Im Monat März 1840.

Kuppler.

Der Plan, nach welchem nun die

industrielle Mechanik

bearbeitet wird, hat sich gegen den frühern dahin abgeändert, daß jetzt das ganze Werk statt aus 2, aus 3 Theilen und einem Atlasse bestehen wird und zwar:

a) I. Theil Einleitung in die industrielle Mechanik nebst der Statik und Dynamik.
   II. Theil. Von den Bestandtheilen der Maschinen und von den bewegenden Kräften.
   III. Theil Verhältnisse, Berechnungen und Effektsbestimmungen wirklich ausgeführter Maschinen.
   } Mit 36 Kpfrtfln.

b) Atlas. Die Elemente der Maschinen in 36 Blättern nebst erläuterndem Text.

Die industrielle Mechanik erscheint in 12 Lieferungen; jede derselben wird aus 6 bis 7 Bogen Text und aus 3 Kupfertafeln bestehen. Der Subscriptionspreis a 12 gGr oder 54 Kr. pr. Lief. verbleibt bis die dritte Lieferung erschienen ist.

Die Elemente der Maschinen erscheinen in 6 Heften, jedes aus 6 Blättern nebst dem erläuternden Text bestehend und wer-

den durchaus mit der Sorgfalt wie das anliegende Probe-Blatt ausgeführt.

Der Subscriptionspreis für ein solches Heft ist ebenfalls 12 gGr. oder 54 Kr.

Nach dem Erscheinen der dritten Lieferung erlischt aber dieser Subscriptionspreis für Beide, und es tritt alsdann der erhöhte Preis von 16 gGr. oder 1 fl. 12 kr. pr. Lief. oder Heft ein.

☞ Wer auf das ganze Werk vor dem Erscheinen der dritten Lieferung subscribirt hat, erhält den Atlas — die Elemente der Maschinen in 36 Blättern — Gratis geliefert; also das aus drei Theilen mit 36 Kupfertafeln bestehende Werk nebst dem Atlas, ebenfalls in 36 Blättern, für 6 Thlr oder fl 10 48 kr.

Die verehrlichen Herren Subscribenten, welche bereits auf das 1. bis 8. Heft, — die ein für sich abgeschlossenes Ganze in dieser erweiterten Form bilden, — unterzeichnet haben, sind nicht zur Annahme des dritten Theils verpflichtet.

Das ganze Werk und der Atlas werden binnen Jahresfrist vollendet sein und sich in den Händen der verehrlichen Herren Subscribenten befinden.

Nürnberg, den 15. März 1840.

August Recknagel.

Alle Buchhandlungen des In- und Auslandes nehmen Subscription darauf an.

Dritte Abtheilung.

Von den Maschinen und den bewegenden Kräften.

I.

Allgemeine Betrachtungen über die Maschinen.

1. Allgemeine Benennungen der Theile einer Maschine. — Beinahe alle industriellen Maschinen sind aus einfachen, wohl von einander unterscheidbaren Theilen, die man Elemente der Maschinen nennt, zusammengesetzt, welche von dem Angriffspunkt der bewegenden Kraft aus, von Theil zu Theil, bis zur Stelle, wo eine vorgegebene Arbeit verrichtet werden soll, die erzeugte Bewegung übertragen.

Den ersten Theil, auf welchen unmittelbar die bewegende Kraft einwirkt, nennt man: Empfänger oder Recepteur, und den letzten Theil, welcher eine vorgeschriebene Arbeit zu verrichten hat: den arbeitenden Theil der Maschine oder Operateur. Die zwischen beiden befindlichen Theile nennt man die Ueberträger, Verbindungstheile oder Communicateure. Oft nennt man auch den Recepteur schlechtweg die bewegende Kraft, indem man ihn als den Theil der Maschine betrachtet, der die Wirkung auf die Andern überträgt. In diesem Sinne kann jeder Theil der Maschine in Bezug auf die folgenden als ein Ort, wo eine bewegende Kraft in Thätigkeit ist, als ein Recepteur, und jeder folgende als ein Operateur angenommen werden.

Aber man muß diese secundairen bewegenden Kräfte nicht mit der primitiven bewegenden Kraft — wie die Schwere, die Wärme, die Muskelkraft der Thiere ꝛc. — verwechseln. Betrachtet man zum Beispiel eine Mahlmühle, so ist in derselben die primitive bewegende Kraft: das Gewicht des Wassers oder die Schwere. Das Wasser selbst ist hier eine sekundaire bewegende Kraft; aber demohngeachtet kann man dasselbe als die wirkliche bewegende Kraft betrachten. In letzterer Annahme ist dann das Wasserrad die sekundaire bewegende Kraft oder der Recepteur, die Zähnräder sind die Communicateure und der Laufer der arbeitende Theil oder der Operateur. Alle Maschinen lassen sich auf ähnliche Weise betrachten. *)

2. Wirkung der Kräfte auf die Maschinen; Anwendung des Princips der lebendigen Kräfte. — Zufolge der im ersten Theil entwickelten allgemeinen Principien kann man entweder die ganze Maschine den aus der primitiven bewegenden Kraft und aus den nützlichen und schädlichen Widerständen

---

*) In einer Spinnmühle, die durch eine Dampfmaschine in Bewegung gesetzt wird, ist die durch die Wärme erzeugte Expansion des Wasserdampfes die bewegende Kraft, der in dem Cylinder auf- und niedersteigende Kolben der Recepteur, der Balancier mit dem Schwungrade und das von diesem zu dem Spinnstuhle hingeleitete Räderwerk bilden die Communicateure (und Regulateure, wie aus dem Folgenden zu ersehen ist) und der Spinnstuhl selbst ist der Operateur. Letztern kann man wieder, als eine für sich bestehende Maschine, auf gleiche Weise zergliedern; dann ist die Kraft, welche während der Bewegung durch das Räderwerk auf die Trommel des Spinnstuhls übertragen wird, die bewegende Kraft, und somit diese der Recepteur; jede einzelne Spindel, mit der ein Faden gesponnen wird, ein Operateur, und die zwischen denselben und der Trommel befindlichen Verbindungstheile sind die Communicateure.

entstehenden Gesammtwirkungen, oder jeden **einzelnen Theil** derselben, der Wirkung der bewegenden Kraft der Vorhergehenden, der Gegenwirkung des Nächstfolgenden und den verschiedenen schädlichen Widerständen, die von der Form, Lage und Bewegung dieser Theile herrühren, unterworfen betrachten und in beiden Fällen mit Bestimmtheit annehmen: daß die **Leistung der bewegenden Kraft** sich jedesmal in drei Theile zerfällen läßt, deren Erster die dem arbeitenden Theile sich entgegensetzenden Widerstände zu bezwingen bestimmt ist, und welche Leistung man die **nützliche Arbeit** nennt; der Zweite zur Beseitigung der den bewegenden Theilen adhärirenden Widerstände, wie der Reibung u. d. g. verwendet wird und welche Leistung man die **schädliche Arbeit** nennt; endlich der Dritte die **Hälfte des Zuwachses** der lebendigen Kraft, der in Bewegung befindlichen materiellen Theile der Maschine, oder des Maschinentheiles ist.

Häufig haben die Maschinen eine gleichförmige Bewegung, dies ist z. B. der Fall bei den Mahlmühlen. Die Zunahme der lebendigen Kraft in denselben ist dann gleich Null, weil die fortwährend in Wirksamkeit befindlichen Kräfte sich immer wieder vernichten. Aus diesem Grunde ist die jeden Augenblick, oder während der Dauer irgend eines Zeitintervalles entwickelte Leistung: der bewegenden Kraft der nützlichen Arbeit und der Summe der schädlichen Widerstände (der schädlichen Arbeit) zusammen genommen gleich.

In den meisten Fällen ist die Bewegung der industriellen Maschinen periodisch, d. h. die Geschwindigkeit irgend eines Theiles derselben ist am Ende einer Anzahl statt gefundener Umdrehungen wieder dieselbe, die ursprünglich an derselben Stelle statt fand. Folglich ist am Ende dieses Zeitmomentes der Zuwachs der lebendigen Kraft ebenfalls Null und die Leistung der bewegenden Kraft ist hier gleichermaßen dem nützlichen Effekt und dem schädlichen Widerstande zusammen genommen gleich. Wenn man diese Schlüsse, welche sich auf alle einfachen und zusammengesetzten Maschinen anwenden lassen, weiter verfolgt, so erlangt

man zuletzt die Ueberzeugung, daß die Leistung an dem Angriffspunkt der bewegenden Kraft, irgend einer Verbindung einfacher Maschinentheile, nie geringer als diejenige des arbeitenden Punktes derselben seyn kann. Es ist dies dasselbe Princip, welches wir früher bei der Betrachtung der einfachen Kräfte, wie der Federn, der Erhebung der Lasten 2c. 2c., oft anzuführen Gelegenheit hatten.

3. Gegenstand der Maschinen; Umwandlung der Arbeit. Der eigentliche Zweck der Maschinen ist also nicht, die mechanische Leistung der an ihnen applicirten bewegenden Kräfte zu vermehren, sondern dieselbe in industrielle Arbeit für die verschiedenen Bedürfnisse des Lebens umzuwandeln. Es ist nicht einer ihrer geringern Vortheile, daß man die mechanische Leistung eines Wassersturzes, oder eines Brennmaterials, oder der Muskelkraft der Pferde 2c. so umzuwandeln im Stande ist, daß man sie zum Mahlen des Getraides, zum Spinnen der Wolle, zum Zersägen des Holzes 2c. zweckmäßig verwenden kann.

Um die Vorstellung von der Umwandlung der Leistung der bewegenden Kraft besser zu fixiren, sei P die Größe dieser Kraft, und V der von ihrem Angriffspunkt in der Zeitsekunde durchlaufene Weg (Geschwindigkeit), so drückt $P \times V$ die Leistung der gegebenen bewegenden Kraft in der Zeitsekunde aus (1. Abth. 35). Eine Maschine bietet uns nun das Mittel dar, den Ausdruck $P \times V$ in einer Arbeit umzuwandeln, deren Leistung in derselben Zeit durch $p \times v$ ausgedrückt ist, wo p die Größe des Widerstandes an dem arbeitenden Punkt, und v dessen durchlaufenen Weg (Geschwindigkeit) in der Zeiteinheit bezeichnet; übrigens muß aber $p \times v$ den Vorhergehenden gemäß nothwendigerweise kleiner als $P \times V$ seyn. Eine Maschine erlaubt uns überdieß, den einen oder den andern der Faktoren p oder v in dem Produkt $p \times v$ in der Art zu modificiren, daß der Widerstand p — 10, — 100 oder überhaupt nmal größer oder kleiner als die Kraft P wird, wo im ersten Falle dann natürlich die Geschwindigkeit v um so kleiner ist, je größer man p annimmt und im zwei-

ten Falle das Umgekehrte statt findet. Der eine oder der andere dieser Fälle ist immer möglich, wenn die nützliche Arbeit $p \times v$ der Differenz der Leistung der bewegenden Kraft und der schädlichen Widerstände (schädlichen Arbeit) gleich ist.

Man kann z. B. eine Maschine so anordnen, daß ein Mann von mittlerer Kraft mittelst derselben eine Last von 1000 oder 10000 Pfund erheben kann, dann muß man aber nothwendigerweise die Geschwindigkeit der Last oder den Weg, welchen der Schwerpunkt derselben in jeder Sekunde durchläuft, sehr vermindern. Der Flaschenzug, der Haspel, die Schraube, der Hebel, die in dem ersten Theil betrachtet wurden, liefern uns Belege zu dem eben Gesagten. Gleichermaßen kann man die Geschwindigkeit eines Operateurs vermehren, sobald man den Widerstand der Maschine vermindert, wodurch jedoch in der durch die Maschine erzeugten Quantität der Arbeit gewöhnlich keine sehr merkbare Veränderung entsteht, indem dieselbe nach wie vor beinahe dieselbe ist. Doch muß hier noch bemerkt werden, daß hinsichtlich der Qualität des zu erzeugenden Produktes und der Dauer der Maschine es nicht immer erlaubt ist, dem Operateur eine willkührliche Geschwindigkeit zu geben. Sehr oft arbeitet derselbe mit einer geringen Geschwindigkeit schlecht, oder ist diese sehr groß, so wird die Maschine entweder sehr erhitzt oder beschädigt und in beiden Fällen vermindert sich der Werth des erlangten Produktes. Die Erzeugung des Mehls liefert ein Beispiel davon. Wenn der Läufer der Mühle sich sehr rasch bewegt, so erhitzt sich das Getraide und wird verdorben. Ist hingegen sein Gang sehr langsam, so reicht die entwickelte Centrifugalkraft nicht hin, die Körner in den Furchen hinauszutreiben, dieselben häufen sich in der Mitte an, und ein unvollkommenes Mahlen findet statt.

4. Die Modification der Faktoren der Arbeit ist nicht willkührlich. — Eben so wenig, als man mit Hülfe der Maschinen die Leistung einer gegebenen bewegenden Kraft vermehren kann, eben so

wenig kann man in allen Fällen die Faktoren **P** und **V** des Produktes $p \times v$, welches die nützliche Arbeit der Maschinen ausdrückt, beliebig modificiren. Der arbeitende Punkt oder Theil der Maschine erfordert immer eine Geschwindigkeit von bestimmter Größe, von der man sich nicht sehr weit entfernen kann, ohne die Qualität oder Quantität des zu erzeugenden Produktes zu vermindern. Mit der Leistung **PV** der bewegenden Kraft hat es eine ähnliche Bewandtniß. Eine bewegende Kraft, die sich durch eine sehr große Geschwindigkeit **V** äußert, bringt nur eine sehr schwache Wirkung **P** hervor und dieselbe kann sogar gleich Null werden, wenn die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes eine sehr hohe Grenze erreicht hat. Wenn im Gegentheil die Geschwindigkeit sehr klein ist oder vielmehr die bewegende Kraft in dem Zustand der Ruhe verbleibt, so ist diese der größten Wirkung fähig. Da nun der Ausdruck für die Leistung der bewegenden Kraft sich aus den beiden Faktoren P und V zusammen setzt, so sind die eben betrachteten beiden Fälle die Grenzen, wo derselbe gleich Null wird. Es gibt also für jede Leistung eine Kraft, eine Geschwindigkeit und eine Wirkung (der Kraft), wo jene ein Maximum wird. Man kann also im Allgemeinen annehmen, daß sowohl für den Recepteur, als für den Operateur einer Maschine die Wege **V** und v, welche die Angriffspunkte der bewegenden Kraft und des arbeitenden Theils in jeder Sekunde durchlaufen (ihre Geschwindigkeiten) in jedem besondern Fall durch gewisse Bedingungen oder Regeln bestimmt werden, die von der Natur der bewegenden Kraft oder der Qualität des zu erzeugenden Produktes abhängen und welche im Voraus einen Werth für die Geschwindigkeit festsetzen, von dem man sich so wenig wie möglich entfernen muß, wenn man mit dem geringsten Aufwand an bewegender Kraft vortheilhaft arbeiten will.

5. **Verlust an der Leistung der bewegenden Kraft durch die schädlichen Widerstände der Maschinen.** — Man erhält

eine Idee von dem, an der Leistung der bewegenden Kraft, durch die Reibungswiderstände der Maschinen entstehenden Verlust, wenn man die Ergebnisse der zuverlässigsten Versuche, die in dieser Beziehung unternommen wurden, in nähere Betrachtung nimmt. Nach denselben erzeugen die einfachsten und vollkommensten Maschinen mittelst ihrer Operateure kaum mehr Arbeit, als $\frac{6}{10}$ — $\frac{7}{10}$ von der Leistung der verwendeten bewegenden Kraft, und wenn jene noch dazu auf zweckwidrige Weise construirt sind, nur $\frac{1}{20}$ — $\frac{1}{50}$ derselben. Letzterer Bruch bezieht sich namentlich auf die ehemals zu Marly vorhandenen Wasserhebungsmaschinen *), — welche lange Zeit die Bewunderung von Europa erregten — indem er den Werth der geleisteten nützlichen Arbeit derselben ausdrückt.

---

*) Diese weltberühmte Maschine zu Marly, die seit 1682 besteht, ließ Ludwig der Vierzehnte erbauen, um mittelst derselben das Wasser aus der Seine über einen Bergrücken hinüber in die Gärten zu Marly und zu Versailles zu schaffen. Die Höhe, zu der das Wasser erhoben wurde, betrug 502 Par. Fuß, und die Röhrenfahrt bis zum höchsten Punkt war beiläufig 3700 Par. Fuß lang. Nach den Angaben Belidor's soll diese Maschine die enorme Summe von 8,000,000 Franken gekostet haben. Sie bestand aus 14 Wasserrädern, die mittelst Pumpen das Wasser zuerst 150 Par. Fuß hoch in ein Reservoir erhoben, hierauf mittelst eines Gestänges dasselbe einem zweiten Reservoir, der 177 Par. Fuß höher als Ersterer lag, zuführten, und endlich von diesem aus es nochmals 177 Par. Fuß hoch bis zu dem auf dem höchsten Punkt erbauten Aequodukt erhoben, von wo aus es dann durch eignen Fall den verschiedenen Punkten zugeleitet wurde. Gegenwärtig sind nur noch die Reste dieser Maschine zu sehen, indem ihre Stelle durch eine zweckmäßig construirte Dampfmaschine ersetzt worden ist.

Vergleicht man mit derselben die auf den bayerischen Salinen in den Jahren 1809—1817 durch v. Reichenbach

Bereits bei der Betrachtung der einfachen Maschinen hatten wir schon Gelegenheit wahrzunehmen, daß die nützliche Arbeit des Keils, welcher der Einwirkung einer bewegenden Kraft unterworfen ist, nur $\frac{1}{8}$ derselben beträgt (2te Abtheil. 116), und daß der Verlust bei der Keilpresse noch beträchtlicher ist. In den Schraubenpressen beträgt dieser Verlust $\frac{2}{3}$ — $\frac{3}{4}$ der bewegenden Kraft (2te Abtheil. 139 und 140). In den einfachsten Flaschenzügen ist derselbe immer noch ungefähr $\frac{1}{6}$, und in einer zweispännigen Wagenwinde über $\frac{1}{8}$ der Leistung der Kraft.

6. Täuschung in der Schätzung des Effekts der Maschinen. — Man kann auch aus dem Vorhergehenden abnehmen, wie grob der Fehler Derjenigen ist, welche, mit der Hülfe sehr zusammengesetzter mechanischer Verbindungen, Wirkungen erzeugen wollen, die allerdings den Augen eines gemeinen Ignoranten, der nichts von der Größe der zur Bewegung dieser Wunderwerke erforderlichen Kraft ahnet, außerordentlich erscheinen. Die Täuschung entsteht in ähnlichen Fällen fast immer dadurch, daß man den Effekt der Maschine nur nach e i n e m der Faktoren der nützlichen Arbeit schätzt, und dabei den andern gänzlich unberücksichtigt läßt, und nur nach der absoluten Intensität der Kraft, welche zur Ueberwindung des Widerstandes erforderlich ist, urtheilt, wie dieß z. B. der Fall ist, wenn

---

ausgeführten Soolenleitungen, welche von Berchtesgaden bis Rosenheim, eine Strecke von beiläufig 370.000 bayer. Fuß oder etwa $12\frac{1}{2}$ deutsche Meilen lang, die Salzsoole fortschaffte; betrachtet man besonders den Hauptpunkt derselben (zu Illsang), wo mittelst einer äußerst einfach construirten Wassersäulenmaschine die Soole mit e i n e m m a l e auf eine senkrechte Höhe von 1218 bayer. Fuß (1094 Par. Fuß) in einer einzigen Röhrenfahrt gehoben wird, so erscheint die ehemalige Maschine zu Marly kleinlich dagegen, und läßt entnehmen, welche ungemeine Fortschritte im Gebiete der praktischen Hydraulik indessen statt gefunden haben.

eine sehr große Last mit der Hülfe einer Schraube erhoben wird und wobei nur auf die Größe derselben, auf alles Uebrige aber gar keine Rücksicht genommen wird. Die Täuschung, welche alsdann das Urtheil der Zuschauer irre leitet, ist derjenigen analog, in die man verfällt, wenn man einem einzelnen Manne eine sehr große metallene hohle Kugel, die man für massiv hält, in die Höhe heben sieht und in Folge dieser irrigen Voraussetzung demselben eine sehr große Stärke beilegt.

In einer ähnlichen Täuschung ist man befangen, wenn eine Person mittelst einer Winde einen an die 100 Centner schweren Fuhrmannswagen erhebt und man die Leistung derselben nur nach der erhobenen außerordentlichen Last beurtheilt, ohne dabei den andern Faktor der nützlichen Arbeit, den durchlaufenen Weg der Last — welcher nach unsern Principien um so kleiner seyn wird, je größer die Last ist und ausserdem noch dadurch gemindert wird, daß durch die schädlichen Widerstände die an der Kurbel der Winde statt findende Kraftäußerung sich noch beiläufig um ein Viertel vermindert — in Betracht zu ziehen.

Man hat zuweilen den Ausruf Archimedes: „Gebet mir einen Stützpunkt, und ich will die Erde èrheben" citirt, um die Möglichkeit außerordentlicher Leistungen zu rechtfertigen, aber dabei nicht erwogen, daß eigentlich der von Archimedes verlangte Stützpunkt die Erde tragen würde und derselbe am Ende einer fast unbegrenzten Zeit sie dennoch nur um eine unangebbare Höhe erhoben hätte.

7. Immerwährende Bewegung. — Manche Individuen verfallen in ihrer Unwissenheit in einen andern Irrthum, indem sie sich eifrig bemühen, die Mittel zur Erlangung einer immerwährenden Bewegung aufzufinden, oder mit andern Worten: die berüchtigte Aufgabe in Betreff des Perpetuum mobile lösen wollen. Dieselben vergessen in dem Eifer, mit welchem sie dieses Phantom verfolgen, daß die Theile der Maschinen während ihrer Bewegung Widerstände hervorrufen, die einen Theil der be-

wegenden Kraft verzehren; daß wenn auch eine Maschine, ohne irgend eine Arbeit zu leisten, sich in dem leeren Raum bewegen würde, dennoch die ihr ein- für allemal eingedrückte lebendige Kraft durch diese Gegenwirkungen nach und nach vermindert, endlich ganz vernichtet und folglich dieselbe früher oder später zum Stillstand gebracht wird. Die seit dem ersten Versuch aller dieser vermeintlichen Erfindungen bis zum gegenwärtigen Augenblick gemachten Erfahrungen bestätigen es, daß in allen bis jetzt zu diesem Zwecke inventirten Maschinen, der Zustand der Ruhe derselben früher oder später nach dem ersten Antrieb eintrat, oder noch öfter sie schon vom Anfange an in demselben beharrten. Hier kann also nicht mehr Täuschung statt finden, so fern nicht der Charlatanismus eigentlich den Vorsatz hatte, täuschen zu wollen, in welchem Falle dann gewöhnlich die Maschine verborgene Theile enthält, die den Sitz einer bewegenden Kraft bilden, welche im Stande ist, die sich während der Bewegung entwickelten schädlichen Widerstände jeden Augenblick zu überwinden, was entweder durch ein kleines, mittelst einer Feder in Bewegung gesetztes Uhrwerk oder auf irgend ähnliche Weise bezweckt wird. Niemals aber bietet uns die Natur bewegende Kräfte dar, deren Wirkung ohne Aufhören sich erhält, oder die sich nicht in der Länge erschöpfen, daher geschieht es immer, daß die Maschine zum Stillstand kommt, wenn sie nicht, wie ein Bratenwender, wieder aufgezogen wird, oder wenn die während ihrer Bewegung sich erzeugten schädlichen Widerstände nicht auf irgend eine naturgemäße Weise beseitigt werden.

Indessen sieht man heut zu Tage häufig Spielzeuge, welche vollkommen mit der immerwährenden Bewegung begabt zu seyn scheinen, und welche diese Eigenschaft in dem Sinne besitzen, daß ihre Bewegung während ganzer Jahre ohne sichtbare Verminderung und ohne die Wirkung von Federn, Gewichten oder anderer sinnlich wahrnehmbarer Kräfte fortdauert. Ein Balancier oder horizontaler Hebel (Fig. 1.), der an beiden Enden zwei im Gleichgewicht befindliche Ku-

geln trägt und mit seiner Are in einem Stativ liegt, macht fortwährend kleine Schwingungen in der Art, daß die eine der Kugeln wechselweise zwei mit elektrischen Säulen verbundene metallene Scheiben berührt. Dieses Spiel überrascht nun allerdings Diejenigen, welche die Eigenthümlichkeiten der elektrischen Säulen nicht kennen. Die Wirkung derselben ist, wenn sie aus den geeigneten Stoffen zusammengesetzt sind, so, daß sie sich ganze Jahre ohne merkliche Abnahme oder überhaupt so lange erhält, bis die in den Säulen eingeschlossenen Substanzen eine Veränderung erleiden. Wie langsam auch dieselbe statt finden mag, so wird sich doch endlich die Wirkung derselben, welche die Trägheit der Kugeln, die Reibung an der Are und den Widerstand des beweglichen Hebels in der Luft zu überwinden hat, mindern, und zuletzt nicht mehr im Stande seyn, die bezeichneten Widerstände zu bezwingen. Die Folge ist dann, daß die Bewegung dieses Apparates aufhört.

Man hat den so eben erwähnten Mechanismus deshalb hier angeführt, weil er der Vollkommenste und Sinnreichste unter allen denjenigen ist, die bis jetzt zur Erzeugung der sogenannten immerwährenden Bewegung inventirt wurden. Fast alle Andern verdanken mehr oder weniger der Unwissenheit ihre Entstehung, und ihr Princip ist oft so plump, daß man auf den ersten Blick den mechanischen Mißgriff, welcher ihre Entstehung veranlaßte, errathen kann. Wir hätten diese für unsern Zweck ganz fremden Reflexionen gänzlich unterlassen, wenn nicht unglücklicherweise gerade Künstler, die in andern Beziehungen durchaus tadellos sind, die Verpflichtungen, die sie ihren Familien, der Gesellschaft und sich selbst schuldig sind, vernachlässigen und sich von der Versuchung hinreißen lassen, den heut zu Tage mit dem gebrantmarkten Namen philosophischer Stein bezeichneten Chimairen nachzujagen und sich daher in dem gleichen Falle befinden, wie die Alchimisten der guten alten Zeit, die da glaubten, aus Steinen und unedlen Metallen Gold machen zu können. Wir werden jedoch hinfort solche Betrachtungen, wovon es fast

in allen Wissenschaften und Künsten Beispiele giebt, unterlassen, und uns nur mit dem Studium der wahren Gesetze der industriellen Maschinen beschäftigen.

8. **Ueber die Errichtung der Maschinen.** — In sofern, als die Maschinen aus drei wesentlichen Theilen: dem Recepteur, dem Operateur und den Communicateuren bestehend betrachtet werden, haben sie Alle einen gemeinsamen Zweck. Hingegen wenn man für das Bedürfniß der Industrie irgend eine Maschine errichtet, so hat man in der Regel die Absicht, eine gewisse Arbeit mit dem möglichst geringsten Kostenaufwand zu liefern. Man sieht hieraus, daß bei der Errichtung der Maschinen eine große Anzahl verschiedenartiger Elemente in Betracht kommen, wie z. B. der Werth der gelieferten Produkte, das erforderliche Anlagekapital für die Erbauung der Maschinen und ihren Zubehör, als da sind: Gebäude, Maschinen, Gehalte der bei dem Betrieb derselben verwendeten Personen ꝛc., die Dauer der Maschine, die Kosten der täglichen Unterhaltung derselben, der Preiß der bewegenden Kraft ꝛc. Ein geschickter Geschäftsmann weiß alle diese Elemente unter sich ins Gleichgewicht zu bringen, und muß ausserdem noch auf die zu bestimmten Zeiten statt findenden Stillstände der Maschine, auf die Feier-Zeit der Arbeiter und auf den Verlust der dadurch in Abgang gekommenen Zeit Rücksicht nehmen; indem es einerseits nachtheilig ist, wenn man das in die Anlage verwendete Capital nicht fortwährend benützt, und andrerseits durch häufige Stillstände in den Arbeiten das Etablissement öfters bloßgestellt wird. Ausserdem kommen dabei noch die Fragen in Betreff des Preises des Transports der erzeugten Produkte, der Leichtigkeit sie abzusetzen, der Communikationswege ꝛc. in Erwägung, die jedoch mehr dem Gebiete der industriellen Oekonomie angehören und kein Gegenstand eines Curses der Mechanik sind. Für uns wird es hinreichen, diejenigen Fragen in nähere Untersuchung zu nehmen, welche sich auf die Oekonomie der bewegenden Kraft beziehen und

übrigens von den Kosten der Maschinen gänzlich abstrahiren.

Unser Zweck ist also, die vortheilhafteste Anordnung aller Theile zu bestimmen und auf welche Weise die erzeugte Waare oder nützliche Arbeit, für eine gegebene Leistung der bewegenden Kraft, die möglichst größte wird. Obgleich der Arbeitspreis nicht die einzige Sache ist, welche den Preis der erzeugten Waare festsetzt, so ist er doch das Hauptelement, und indem man ihn mit den ursprünglichen Kosten der Errichtung einer Maschine und ihrem Zubehör vergleicht, findet man, daß diese nur ein schwacher Bruch der Arbeitskosten sind. Um eine Idee von dem Verhältniß dieser Letztern zu dem Preiß einer Maschine zu geben, beschränken wir uns nur anzuführen, daß in Frankreich die Arbeit von sechszehn Pferden 32 Franken per Tag oder 11,520 Franken per Jahr kostet, welche Summe die Interessen eines enormen Capitals repräsentirt, in sofern man es mit der Summe von 32,000 Franken, welche ungefähr das Etablissement kostet, vergleicht.

Noch ein anderer Umstand trägt viel dazu bei, daß die nützliche Arbeit der Maschine ein Maximum wird: wenn nemlich dieselbe **dauerhafter** als eine andere damit verglichene gebaut ist, so ist sie in dieser Beziehung auch **ökonomischer**, indem die Wirkung der Kräfte dann mit mehr Regulairität statt findet und dadurch die nützliche Leistung vergrößert wird. Deswegen studiren wir die Mittel, wodurch die Arbeit zu einem Maximum gebracht werden kann, und die Ursachen, welche sie zu vermindern streben.

9. Ueber die Anordnung der Maschinen. — Die erste Sache, womit man sich bei der Anordnung einer Maschine beschäftigt, ist die Wahl des arbeitenden Theils derselben oder des Operateurs; dann schreitet man zu der bewegenden Kraft oder dem Recepteur; hernach kommen die Verbindungstheile, welche die Wirkung der bewegenden Kraft auf den Operateur nach den voraus festgesetzten, von der Art der Arbeit derselben abhängigen Bedingun-

gen übertragen und so angeordnet werden, daß sie den besten Effekt erzeugen und das Verhältniß von $p \times v$ zu $P \times V$ so groß wie möglich machen.

Die Wissenschaft der Maschinen von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet, umfaßt also die Kenntniß der Operateure, der bewegenden Kräfte, der Communikateure und der Modifikateure; diesem ist noch die der Baukunde beizufügen, welche lehrt, wie die Dimensionen der verschiedenen Theile bestimmt werden und wie dieselben angeordnet und geformt seyn müssen, damit sie bei möglichster Oekonomie des Materials die größte Solidität und Dauer besitzen, und somit geeignet sind, unnöthigem Abgang der bewegenden Kraft vorzubeugen. Man wird nicht in das Detail aller dieser Fälle eingehen können, indem die Verbreitung über einen Einzelnen schon eine sehr lange Diskursion erfordern würde, sondern wir werden uns auf das Wesentliche und auf die allgemeinern nützlichen Regeln beschränken.

Wir werden also wenig über die Operateure vor der Hand zu sagen haben, da ihre Zahl unermeßlich ist und jeder besondere Fabrikationszweig eine sehr große Mannigfaltigkeit derselben zur Folge hat; auch hat man überdieß wenig über diese Bestandtheile der Maschinen und über die guten Eigenschaften derselben geschrieben. Indessen sind Einige von allgemeinem Gebrauch, wie z. B. die Pumpenkolben und Andere, die wir in der Folge näher kennen lernen werden. Das Studium der Recepteure ist so innig mit dem der bewegenden Kräfte verbunden, daß man nicht von jenen sprechen kann, ohne gleichermaßen diese mit zu betrachten. Dagegen ist die Zahl der Verbindungstheile der Maschinen, welche die Bewegung übertragen, beträchtlich; alle Tage werden neue Combinationen bekannt und die Kenntniß derselben bildet eine besondere Wissenschaft, welche man jedoch mit Unrecht von einem geometrischen Gesichtspunkte aus betrachtet hat. Aber diese Combinationen sind begrenzt, wenn man sie von dem mechanischen Standpunkte aus ins Auge

faßt; deshalb werden wir Regeln festsetzen, mit deren Hülfe man die zweckmäßigen Verbindungen von denen, welche für die Industrie ohne Nutzen sind, zu unterscheiden im Stande ist. Hinsichtlich der Wirksamkeit der Maschinen giebt es zwei äußerste Grenzen; die Eine ist: wo die Maschinen nur sehr schwachen Wirkungen ausgesetzt sind, in diesem Falle sind die Dimensionen und Formen der Verbindungstheile wenig wichtig; die Andere ist: wo die Wirkungen der Maschinen sehr kräftig, mächtig sind; dann müssen die Verbindungstheile sorgfältig nach den Gesetzen der Mechanik angeordnet werden und die Darstellung der Regeln hiefür wird dann um so wesentlicher, je bedeutender die Wirksamkeit der in der Industrie verwendeten Maschinen ist.

Ueberhaupt, um eine gut construirte Maschine von einer schlecht angeordneten zu unterscheiden, muß man untersuchen, auf welche Weise sich die Wirkung von dem Recepteur auf den Operateur überträgt. Diese Uebertragung findet allmählig durch eine Folge von Theilen statt, welche sich entweder schieben oder ziehen und deren Geschwindigkeiten in irgend einem Verhältniß von Theil zu Theil zu- oder abnehmen. Im Verlauf dieses Cursus wird man die fernern Anhaltspunkte zur richtigen Beurtheilung einer Maschine vorfinden.

10. Beginnende Bewegung der Maschinen. — Man nehme eine im Zustand der Ruhe befindliche Maschine; denke sich an dem Recepteur derselben eine bewegende Kraft und an ihrem Operateur einen Widerstand angebracht, so ist es augenscheinlich, daß, wenn dieselbe in Bewegung gerathen soll, die Leistung der bewegenden Kraft diejenige des Widerstandes überwiegen muß. Die Bewegung beginnt dann und beschleunigt sich so lange, als ein Ueberschuß jener über diesem statt findet. Aber in derselben Zeit, während welcher sich die Geschwindigkeit vermehrt, vermindert sich nicht nur die Wirkung der bewegenden Kraft (3te Abth. 4.), sondern gewisse Widerstände wachsen gleichzeitig. Während also die Geschwindigkeit fort und

fort wächst, nimmt die Leistung der bewegenden Kraft ab und diejenige der Widerstände zu. Es ist also unmöglich, daß sich die Geschwindigkeit unbestimmt fort vermehrt, wie dies der Fall bei einem im leeren Raum von einer unbestimmten Höhe frei herabfallenden Körper ist, dessen Geschwindigkeit fortwährend größer wird, je tiefer er fällt, sondern eben so wie dieser Körper, wenn er sich in einem Medium, z. B. in der atmosphärischen Luft bewegt, zuletzt eine endliche constante Geschwindigkeit, durch die Gegenwirkungen der immer wachsenden Widerstände, die bald mit der Wirkung Schwere ins Gleichgewicht treten, erlangt; eben so wird in der oben betrachteten Maschine endlich ein Moment eintreten, wo die Bewegung aufhört sich zu beschleunigen und die bewegende Kraft ins Gleichgewicht tritt. Die Geschwindigkeit kann sich aber über diese Grenze hinaus nicht beschleunigen und bleibt von diesem Augenblick an constant. Die Zeit, die bis zum Eintritt dieses Moments verfloß, ist mehr oder weniger lang, je nachdem die Widerstände größer oder geringer sind, indem die bewegende Kraft im ersten Falle ziemlich langsam, im zweiten Falle dagegen viel schneller zu ihrer Grenze gelangt. Es ist nun leicht der grobe Fehler zu erkennen, der begangen wird, wenn man einige Sekunden nachher, nachdem die Schütze, welche den Wasserzufluß einer Mahlmühle absperrt, erhoben worden, die Bewegung derselben als eine gleichförmige betrachten, und von der Arbeit des Läufers, in diesem Moment auf ihre Leistung schließen wollte.

Hier ist auch der Ort, das Verfahren anzugeben, wie man an Ort und Stelle die Geschwindigkeit einer Maschine, z. B. eines Rades, das bereits eine gleichförmige Bewegung angenommen hat, bestimmt. Man bezeichnet eine Stelle des Rades mit einem Kreidestrich und beobachtet, wie oftmals derselbe mit einem festen Punkt eines benachbarten Objekts während einer gewissen Zeit zusammen fällt, multiplicirt diese Zahl mit der Peripherie des markirten Punktes und dividirt das erhaltene Produkt durch die Zahl der Sekunden, welche während der Dauer der Beobachtung verflos-

sen; der Quotient drückt die Geschwindigkeit des **markirten Punktes** aus. Ich sage absichtlich: des markirten Punktes; denn alle andern Punkte des Rades, die innerhalb oder ausserhalb der angenommenen Peripherie liegen, haben **verschiedene** Geschwindigkeiten, die ihren Abständen von der Axe proportional sind.

11. Von den verschiedenen Wirkungen, die sich während der Bewegung in einer Maschine entwickeln. — Wir wollen nun untersuchen, welche Rolle die verschiedenen, an einer in Bewegung befindlichen Maschine wirksamen Kräfte spielen. Es sind sehr verschiedene Arten, nemlich:

1) die Schwere oder das Gewicht der verschiedenen Theile;
2) die an dem Recepteur angebrachte bewegende Kraft, welche die eigentliche Arbeit erzeugt;
3) der nützliche Widerstand, welcher durch die Arbeit des Operateurs erzeugt wird;
4) die schädlichen Widerstände, wie z. B. die Reibung, die Adhäsionskraft, der Widerstand des Mediums, in dem sich die Maschine bewegt, diejenigen der Ketten, Seile, Riemen ꝛc.;
5) die Kraft der Trägheit der einzelnen bewegenden Theile; dieselbe ist ein wirklicher Widerstand, wenn die Bewegung sich beschleunigt, hingegen eine wirkliche Kraft, wenn dieselbe sich verzögert;
6) die moleculaire Wirkung der Körper, welche durch die Zusammendrückung, Ausdehnung oder Biegung derselben während der Dauer der Bewegung entstehen, und welche in Folge der unvollkommenen Elasticität dieser Körper eine gewisse Formveränderung in ihnen erzeugt, die nothwendigerweise einen Theil der verwendeten bewegenden Kraft absorbirt.

12. Einfluß der Schwere. — Wenn der Schwerpunkt eines Körpers oder eines Systems von Körpern während der Dauer der betrachteten Bewegung weder

auf- noch absteigt, sondern fortwährend in derselben Höhe verbleibt, so wird durch die Schwere nichts von den wirksamen Kräften consumirt (2te Abth. 50 und 51.). Dieser Hergang findet statt bei einem symmetrisch geformten Rade, dessen Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt seiner Bewegung zusammen fällt; bei einer Welle, wo derselbe immer in der Axe derselben verbleibt und im Allgemeinen bei allen denjenigen Maschinen, deren Theile rotiren. Weil alsdann der Schwerpunkt weder steigt, noch fällt, so ist dessen in vertikaler Richtung durchlaufene Weg, so wie die Arbeit der Schwere gleich Null. Da aber diese Theile von den Lagern und Stützen, in denen sie sich bewegen, getragen werden, so üben sie auf dieselben einen Druck aus, und erzeugen dadurch in geringern oder größern Graden eine Reibung, je nachdem sie leichter oder schwerer, oder mehr oder minder sorgfältig bearbeitet sind; dies ist aber auch der ganze, von ihrem Gewichte herrührende Einfluß.

Oft findet auch der Fall statt, daß gewisse Theile der Maschinen wechselseitig steigen und sinken, wie z. B. die mit den Stangen verbundenen Kolben in den Pumpen; die Leitstangen oder Stelzen der Dampfmaschinen, welche die wechselseitige Bewegung des Balanciers in die kreisförmige des Schwungrades umändern rc. Wenn solche Theile steigen, so verzehren sie einen Theil der Leistung der bewegenden Kraft, der dem Produkte aus ihrem Gewicht in den vertikalen Weg ihres Schwerpunktes gleich ist. Da aber dieselben sich nicht unbestimmt fort erheben können, so müssen sie, damit ihre Bewegung fortdauern kann, nothwendigerweise wieder niedersteigen und alsdann ist ihre Arbeit dieselbe, wie beim Aufsteigen, und vermehren die Leistung der bewegenden Kraft gerade um so viel wieder, als sie dieselbe zuvor vermindert hatten. Wenn also der Effekt des Gewichtes dieser Theile der bewegenden Kraft bald zu Hülfe kommt, bald ihr entgegen ist, und zwar so: daß für jeden Umgang oder jede wechselseitige Bewegung des Maschinentheils die Verminderung der Kraft so groß, als die Vermehrung ist,

so wird augenscheinlich die Arbeit dieses Theils gleich Null seyn. Man hat also weder bei der wechselseitigen, noch bei der Kreisbewegung auf die Wirkung der Schwere Rücksicht zu nehmen. Aber darauf hat man wohl zu achten, daß man die Pressungen dieser schweren Körper auf ihre Unterlagen nicht vernachlässigt, weil ihre Gewichte schädliche Widerstände, die man nicht unberücksichtigt lassen darf, hervorrufen. Aus diesem Grunde und um dieselben möglichst geringe zu machen, muß man vermeiden, diesen Theilen eine plumpe Gestalt zu geben.

13. Einfluß der bewegenden Kraft und des Widerstandes des Operateurs. — Man hat (3te Abth. 4.) gesehen, daß bei der Festsetzung der bewegenden Kraft Bedingungen zu berücksichtigen sind, die ihren Effekt erhöhen und ihre Leistung bei einer gegebenen Geschwindigkeit des Recepteurs zu einem Maximum machen. Dieselben Bedingungen sind gleichermaßen auf den Operateur oder den arbeitenden Theil der Maschine anwendbar.

14. Einfluß der schädlichen Widerstände. — Die Reibung, deren Wirkung unter allen Verhältnissen nachtheilig für die Bewegung ist, vermindert um so mehr die Leistung der bewegenden Kraft, je mehr sich die Bewegung beschleunigt; auch ist sie es, die hauptsächlich den Verlust der Arbeit veranlaßt. Um den Effekt dieser Widerstände zu verringern, muß man die beiden Faktoren der durch die Reibung entstehenden Arbeit $R \times r$ (wo R die Resultirende aller combinirten Reibungs-Widerstände und r den sehr kleinen Weg, welchen der Angriffspunkt desselben auf der reibenden Oberfläche durchläuft, bezeichnet) vermindern. Die gewöhnliche Reibung einer Maschine ist diejenige eines Zapfens in dessen Lagern (Fig. 2.) und der Werth R ihres Widerstandes ist dem Druck des Zapfens gegen dessen Unterlage proportional. (2te Abth. 121.) Der Werth r ist dann der sehr kleine Bogen, welchen ein Punkt des Zapfens beschreibt und folglich denselben Halb-

messer wie dieser hat. Diese Art Reibung absorbirt einen Theil der Leistung der bewegenden Kraft, dessen Größe durch das Produkt $R \times r$ ausgedrückt ist.

Der Faktor **R** wird dadurch auf seinen möglich kleinsten Werth gebracht, daß man die Oberfläche des Zapfens und der Unterlage polirt und zwischen beide eine entsprechende Schmiere bringt; den Werth von **r** vermindert man dadurch, daß der Halbmesser des Zapfens so klein, als es nur immer die Umstände gestatten, angenommen wird. (2te Abth. 122.) Ueberdieß wird man sich erinnern, daß die Vergrößerung der reibenden Flächen keinen Einfluß auf den Werth **R** ausübt. (2te Abth. 107.)

Wenn der Widerstand durch das Medium, in welchem sich die Maschine bewegt, entsteht, dann muß man ihren Theilen die vortheilhafteste Form, die durch diesen Widerstand bedingt wird, geben.

15. Einfluß der Trägheit. — Die Trägheit der Theile äußert sich nur, wenn die Bewegung varirt. Wenn in gewissen Zeitmomenten die Arbeit der Widerstände die Leistung der bewegenden Kraft übersteigt, so muß nothwendigerweise die Bewegung sich verzögern; dann verbindet sich aber die Wirkung (Arbeit) der Trägheit mit derjenigen der bewegenden Kraft und unterstützt die Bewegung. Wenn hingegen die Leistung der bewegenden Kraft größer, als diejenige der Widerstände ist, so wirkt die Trägheit der Beschleunigung, welche durch jene entsteht, entgegen, und vermindert durch ihre Wirkung (Arbeit) diejenige der bewegenden Kraft. Die Trägheit hat also nach Verfluß einer bestimmten Zeit, an deren Ende die Geschwindigkeit der Maschine in Folge einer periodischen Bewegung wieder dieselbe geworden ist, in Wirklichkeit nichts von der Leistung der bewegenden Kraft verzehrt. Ihre Rolle, die sie in den eben betrachteten Fällen spielt, ist folglich dieselbe, wie die der Schwere; so daß also, so lange die Periode der Bewegung dauert, die Leistung der bewegenden Kraft, derjenigen

der nützlichen Arbeit und der schädlichen Widerstände zusammen genommen, gleich ist.

16. Einfluß der moleculairen Rückwirkungen. — Wenn die Theile einer Maschine in Bewegung gesetzt sind, so biegen, winden oder stauchen sie sich; mit einem Wort, sie erleiden eine Umänderung ihrer ursprünglichen Form, welche zuweilen sogar den Bruch derselben (in welchem Falle dann die Bewegung unterbrochen ist) zur Folge haben kann, wenn ihre Dimensionen unzureichend für den vorliegenden Zweck genommen worden sind. Die Betrachtung der moleculairen Wirkungen ist daher sehr wichtig, weil die Körper niemals vollkommen elastisch sind, und es also sehr leicht statt finden kann, daß sie mehr oder weniger eine Formveränderung erleiden. Die Größe der Wirkung, welche sich hieraus entwickelt und sich nicht mehr ersetzt, ist um so größer, je bedeutender die statt gefundene Formveränderung war. Wenn die Kräfte nicht stetig wirken, sondern ihre Wirksamkeit in bestimmten aufeinander folgenden Zeitmomenten unterbrochen wird, so wiederholt sich die Formveränderung so oftmals, als diese Unterbrechungen statt fanden, und durch jede derselben wird die Leistung der bewegenden Kraft vermindert. Die Stöße sind also immer eine Quelle des Verlustes an Arbeit; während ihrer Dauer erzeugen sich zwischen den sich berührenden Körpern enorme Pressungen, wodurch die Formveränderungen, und als Folge von diesen, Verluste der Wirkung entstehen, die sich wegen der unvollkommenen Elasticität nicht wieder ersetzen können. Es ist daher unumgänglich nöthig, überall, wo es die Umstände gestatten, die Stöße in den Maschinen zu vermeiden; man gelangt dazu, wenn man die Theile, welche sich führen oder die Bewegung übertragen, so construirt, daß sie von einander nicht eher abgleiten, bis zwei nächstfolgende wieder in Berührung sind; daß die Bewegung derselben nur unmerklich zu- oder abnehme, also sich nicht augenblicklich, sondern nach und nach verändere, und daß sie zwischen sich den möglichst geringen Spielraum haben. Im

Allgemeinen entstehen die Stöße durch zu große Spielräume zwischen den in Bewegung befindlichen Theilen, welche verursachen, daß jeder derselben mit einem gewissen Grade von Geschwindigkeit bei den Vorangegangenen anlangt, oder daß die Kräfte bald in dem einen, bald in dem andern Sinne wirken. Es folgt also hieraus, daß die Form der stoßenden oder der schiebenden Theile mit geometrischer Strenge und ohne irgend eine Unterbrechung in ihren Begrenzungen construirt werden müsse. Solches ist auch die Ursache, warum man den Querschnitten der Zapfen, welche sich in ihren Lagern drehen, eine kreisförmige Form giebt; wären diese Querschnitte Quadrate, so würden sie sich nur um ihre Winkel bewegen können, und jede Seite in dem Augenblick, wo sie sich auf die Unterlage auflegt, dieselbe heftig stoßen. Eine elliptische Form würde zwar zu keiner Erschütterung Anlaß geben, aber der Schwerpunkt des Zapfens oder desjenigen Maschinentheils, wovon er nur ein Bestandtheil ist, nähme wechselsweise die höchste oder tiefste Stelle ein, je nachdem die große oder die kleine Axe der Ellipse die vertikale Richtung hätte, und aus dieser Veränderung der Lage des Schwerpunktes entständen Ungleichheiten der Wirkung, die immer als nachtheilig zu betrachten sind.

17. Nachtheile der veränderlichen Bewegung. — Die im vorigen Paragraphen betrachteten Verluste der Arbeit finden nicht nur während der Stöße, sondern auch dann noch — obgleich weniger bemerkbar — statt, wenn sich die Geschwindigkeiten der Maschinen verändern, oder ihre Bewegung varirt. Jede Veränderung in den Geschwindigkeiten setzt eine andere in den Kräften, welche an der Maschine in Thätigkeit sind, voraus, denn diese können, von Null an, bis zu einer gewissen Grenze jeden beliebigen Werth erlangen, und bald in dem einen Sinne, bald in dem andern thätig seyn. Diese wechselseitigen Einwirkungen, denen die Theile der Maschinen ausgesetzt sind, erzeugen in ihnen gewisse Formver-

änderungen, welche nie ohne irgend einen Verlust an Arbeit statt finden können. Ueberdieß ist es hinsichtlich der Dauerhaftigkeit der Maschinen nothwendig, daß die Verhältnisse der Theile derselben den Kräften, welchen sie unterworfen sind, proportional seyen, und aus diesem Grunde müssen diejenigen einer Maschine mit veränderlicher Bewegung viel plumper, als für eine andere mit gleichförmiger Bewegung gestaltet seyn; daher sind in jener die schädlichen Widerstände viel beträchtlicher, als in dieser, und es ist also leicht zu beweisen: daß für gleiche in derselben Zeit geleistete Arbeit, die Maschinen mit veränderlicher Bewegung eine viel beträchtlichere Kraft, als die mit gleichförmiger Bewegung erfordern.

In der That kann man die Kraft, die dem arbeitenden Theil einer Maschine inwohnt, als die Mittlere aller der an ihr wirksamen Kräfte betrachten; ist also die Bewegung veränderlich, so ist es auch diese Mittelkraft, ist jene gleichförmig, so ist diese constant. Es läßt sich daher die Arbeit einer Maschine mit veränderlicher Bewegung durch die von einer krummen Linie begrenzte Fläche ABDOC (Fig. 3) ausdrucken, deren Abscissen die durch die veränderlichen Kräfte in den auf einander folgenden Zeitelementen beschriebenen Wege, und die Ordinaten diese Kräfte repräsentiren. Die in derselben Zeit geleistete Arbeit einer zweiten Maschine mit gleichförmiger Bewegung läßt sich dagegen durch ein Rechteck ABFE darstellen, dessen Basis AB den Weg bezeichnet, welchen die, durch die Höhe AE ausgedrückte, constante Kraft während der gegebenen Zeit durchläuft. Aus der Vergleichung beider Figuren ersieht man, daß das Rechteck ABFE nie der Fläche ABDOC gleich werden wird, wenn nicht die Ordinaten der krummen Linie COD bald kleiner, bald größer, als die Höhe AE werden. Wir ziehen daraus den Schluß, daß wenn eine und dieselbe Arbeit in derselben Zeit durch zwei verschiedene Maschinen, deren Eine eine gleichförmige, die Andere eine veränderliche Bewegung hat, er-

zeugt werden soll, Letztere einer größern Kraft als Erstere unterworfen ist, folglich ihre Theile viel stärker seyn müssen und größere Dimensionen erfordern; dadurch werden sie aber schwerer, veranlassen eine größere Reibung und die passiven Widerstände vermehren sich. Es ist also von hoher Wichtigkeit, die Bewegung jeder Maschine so viel als möglich gleichförmig zu machen.

18. Mittel die Bewegung gleichförmig zu machen. — Wenn also der Vortheil der gleichförmigen Bewegung der Maschinen so groß ist, wie erlangt man dieselbe? — Es giebt nur ein einzelnes Mittel, diesen Zweck zu erreichen; nämlich: zu allen den Theilen, woraus die Maschine zusammengesetzt werden soll, nur gezähnte Räder oder Rollen mit Riemen (oder Schnüren) zu verwenden; damit sich dieselben gleichförmig drehen, müssen sie richtig centrirt seyn, so daß ihr Schwerpunkt während ihrer Rotation weder steige noch sinke. Diese Symmetrie der Räder in Bezug auf ihre Axen, hat ausserdem noch den Vortheil, daß die Centrifugalkräfte, welche den Mittelpunkt der Umdrehung in den verschiedenen Theilen eines jeden Rades nach aussen zu treiben streben, sich gegenseitig vernichten und auf die Axe keinerlei Druck hervorbringen. Daß die kreisförmige Bewegung wirklich die Einzige ist, die gleichförmig gemacht werden kann, ist in der That so; denn die geradlinige Bewegung selbst kann nicht unbestimmt fortdauern, und die derselben unterworfenen Theile müssen daher nach einer gewissen Zeit in ihre ursprüngliche Stellung zurückkehren. Diese Bewegung ist also nicht gleichförmig, sondern wechselseitig.

19. Hauptfälle der Unregelmäßigkeiten der Bewegung; — Mittel sie zu corrigiren. Man unterscheidet drei Hauptursachen der veränderlichen Bewegung der Maschinen, nämlich:

1) die Unregelmäßigkeiten der Wirkung der bewegenden

Kraft,

2) Die Unregelmäßigkeiten der Wirkung der nützlichen Widerstände,

3) . . . . beider zusammen auf einmal

Es ist zwar selten möglich, die unregelmäßige Bewegung durch die zu Gebote stehenden Hülfsmittel gleichförmig machen zu können; indessen ist schon wesentlich gewonnen, wenn man im Stande ist, dieselbe so zu modificiren, daß sie sanft und ohne Stöße oder ähnliche Unterbrechungen vor sich geht. Soll also der Operateur oder der Recepteur eine wechselseitige Bewegung besitzen, so wird man dieselbe mittelst eines der Mittel, die wir im folgenden Abschnitt kennen lernen werden, in eine kreisförmige umwandeln. Wenn Beide eine wechselseitige Bewegung haben müssen, so wird man untersuchen, ob es nicht vortheilhaft sey, den Verbindungstheilen eine Bewegung von gleicher Natur zu geben, d. h. eine solche, die mit derjenigen des Recepteurs und des Operateurs übereinstimmt. Wenn z. B. eine Dampfmaschine die Bestimmung hat, ein Pumpwerk in Bewegung zu setzen, so ist man in der Regel im Stande, beide wechselseitige Bewegungen so anzuordnen, daß sie gleichzeitig stattfinden; ist dies jedoch unmöglich, sollen in derselben Zeit, da der Kolben der Dampfmaschine 2, 3, nmal auf und niedersteigt, die Pumpenkolben eine größere oder kleinere Zahl von Hüben machen, so wird man zuerst die wechselseitige Bewegung der Dampfmaschine in eine kreisförmige umwandeln und hernach diese wieder in eine wechselseitige umkehren. Endlich können gewisse Maschinen, deren Verbindungstheile aus Rädern bestehen und deshalb einer gleichförmigen Bewegung empfänglich sind, in Folge dessen, daß der nützliche Widerstand oder die bewegende Kraft nicht constant bleibt, sich unregelmäßig bewegen, z. B. die neuern Holzschneidmühlen mit Kreissägen, die sich immer nur nach derselben Richtung drehen, gehören den gleichförmig sich bewegenden Maschinen an; allein die Aeste des Holzstückes, welches zerschnitten wer-

den soll, sind hier als die Ursachen, welche den Widerstand veränderlich und folglich die Bewegung, — wenn auch nur in geringem Grade — unregelmäßig machen, zu betrachten. Zuweilen besteht die Arbeit aus getrennten, von einander unterscheidbaren Wirkungen, wie z. B. da, wo gewisse Substanzen zerstoßen werden sollen, in welchem Falle es also nicht möglich ist, daß der Stampfer continuirlich fortwirken könne. In allen solchen Fällen, wo die Theile sich wechselseitig bewegen, sucht man die Wirkungen entweder durch Gegengewichte oder durch andere Mittel zu reguliren; bestehen die Widerstände aus einer Folge von Stößen, so muß man sie so vertheilen, daß sie in gleichen aufeinander folgenden Zeitintervallen statt finden; hat die bewegende Kraft oder der Widerstand die Neigung, sich leicht zu verändern, so muß man sorgen, daß sich diese Veränderungen nicht über eine gewisse Grenze hinaus ausdehnen, was gewöhnlich mittelst der Regulateure oder Moderateure bezweckt wird.

Das Gewicht, welches als bewegende Kraft eines Bratenwenders dient, würde sehr rasch niedersteigen und die Bewegung aller einzelnen beweglichen Theile derselben beschleunigen, wenn dessen Windfang in Folge der Beschleunigung seiner Geschwindigkeit von der umgebenden Luft nicht einen Widerstand erlitte, der hinreichend ist, die Wirkung des Gewichts zu balanciren und es zu einer gleichförmigen Bewegung zu veranlassen. Dieser Windfang übt also hier die Funktion eines Regulateurs aus.

Dasselbe findet statt bei den Sicherheitsventilen der Dampfmaschine, welche sich heben, sobald die Wirkung der Dämpfe eine Grenze höher, als diejenige, welche für den Zweck der Maschine angenommen ist, übersteigt, oder bei den Centrifugal-Regulateuren, welche den Zugang der Dämpfe vermindern, wenn die Bewegung der Maschine rascher wird. Der Rüttler der Mahlmühlen, welcher den gleichförmigen Einlaß des Getreides in das Läuferauge regulirt, läßt eine größere Quantität hineinfallen, sobald sich die Maschine beschleunigt, und vermehrt dadurch nach

Maßgabe, als der zweite Faktor V der Leistung der bewegenden Kraft P×V größer geworden ist, den Widerstand.

Der Geisfuß in den Sägmühlen ist so angeordnet, daß er den Sägwagen mit dem darauf befestigten Stück Holz um $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ Linie, bei jedem Niedergange der Säge vorwärts schiebt, je nachdem der Holzblock eine größere oder geringere Dicke hat.

Endlich ist noch als letztes Hülfsmittel das Schwungrad übrig; dasselbe besteht aus einem großen gegossenen eisernen Ringe, der durch Arme mit einer der Wellen der Maschine verbunden und mit einer großen rotirenden Geschwindigkeit begabt ist. Solches bildet einen wahren Reservoir der Arbeit und regulirt durch seine Trägheit die Bewegung der ganzen Maschine. Die Eigenthümlichkeit eines jeden Theiles, der sich mit einer großen lebendigen Kraft um eine Axe dreht, ist nämlich diese, daß dadurch die Maschine gezwungen wird, ihre Bewegung fortzusetzen, sobald die bewegende Kraft anfängt, in ihrer Wirkung nachzulassen, oder daß dadurch ihrer Beschleunigung ein Widerstand entgegen gesetzt wird, sobald sie das Uebergewicht über alle die andern Widerstände erlangt. Wir werden später die Anordnung eines Schwungrades, auf das mittelst einer Kurbel und einer Leitstange die einem Tritte eingedrückte Bewegung übertragen wird, in allen Einzelnheiten betrachten und dabei zeigen, daß es möglich ist, das Gewicht derselben so zu bestimmen, daß die Geschwindigkeit nicht mehr als um $\frac{1}{30}$ varirt.

II.

Von den Kommunicateuren der Bewegung oder den Verbindungstheilen der Maschinen.

20. Classification der Elemente der Maschinen, hinsichtlich der Bewegung, die sie empfangen und übertragen. — In der Beschreibung derjenigen Theile der Maschinen, welche die Bewegung auf einander übertragen, werden wir die Recepteure und die Operateure nicht mit aufnehmen, weil die Erstern bei den bewegenden Kräften mit in Betrachtung kommen, und die Zahl der Letztern zu groß ist und deshalb eine besondere Untersuchung erfordern. Der berühmte Monge, der Mit-Begründer der Pariser polytechnischen Schule hatte die erste Idee gehabt, die Elemente der Maschinen nach der Natur ihrer Bewegung, welche sie empfangen oder übertragen, in Classen einzutheilen. Lanz und Bétancourt hatten hernach in dem von ihnen herausgegebenen Werk: Essais sur la composition des machines, diese Classification angenommen und durchgeführt, allein in Vergleich mit den indessen stattgefundenen Fortschritten in der Maschinenkunde ist dasselbe gegenwärtig veraltert; viele ausgezeichnete Verbindungen finden sich in demselben gar nicht, und eine große Zahl der darin Beschriebenen ist mangelhaft. Deshalb geben wir hier vorerst einen Begriff von dem durch Monge aufgestellten Classifications-System und werden hernach die wichtigsten und die durch die Erfahrung als brauchbar anerkannten Communicateure durchgehen. Man hat bereits gesehen, daß

die Bewegung der Elemente der Maschinen auf zwei Hauptarten zurückgeführt werden kann: die continuirliche, oder beständig nach einer Richtung stattfindende, und die wechselseitige oder hin und her gehende Bewegung; dieselben können ferner nach der Richtung einer geraden Linie, oder im Kreise um einen Punkt oder um eine Axe statt finden, d. h. die Bewegung kann geradlinig oder kreisförmig seyn; (die Bewegung in irgend einer andern krummen Linie, als diejenige des Kreises, kommt in der industriellen Mechanik äußerst selten vor). Man hat also vier Arten der Bewegung, welche unter sich selbst, oder je zwei und zwei mit einander verbunden, zehn bis fünfzehn Haupt-Combinationen geben. Aber verschiedene derselben sind nur auf Recepteure oder Operateure anwendbar; andere üben nur die Funktionen der Regulateure oder Modificateure aus. Wenn man daher diese, so wie alle diejenigen Verbindungen, welche mangelhaft sind, ausscheidet, so bleiben sehr wenig mögliche Umformungen der zwischen dem Recepteur und dem Operateur stattfindenden Bewegung übrig. Auch haben wir fast nur die Umwandlung der geradlinigen oder kreisförmigen continuirlichen Bewegung in geradlinige oder kreisförmige Unterbrochene, oder die continuirliche kreisförmige in Wechselseitige, zu betrachten. Jene wird gewöhnlich mittelst gezähnter Räder, Riemen oder Schrauben, diese mit der Hülfe der Kurbeln nebst ihren Lenkstangen, oder der excentrischen Scheiben bewerkstelligt.

21. Uebertragung der continuirlichen geradlinigen Bewegung. — Unter allen Umwandlungen der Bewegung ist dies die Einfachste; sey es, daß die übertragene Bewegung in derselben, oder in einer andern Ebene stattfinden soll. Unter den verschiedenen Mitteln, die man zur Erreichung dieses Zweckes anwendet, ist die Rolle das Gebräuchlichste und Bequemste. Man giebt diesen Namen einer soliden, um eine Axe beweglichen Scheibe, (Fig. 4.) welche auf ihrem Umkreise für die

Aufnahme eines Seiles ausgehöhlt ist, und deren Seitenflächen etwas bäuchig sind, damit sich dieselben an dem zu ihrer Aufnahme bestimmten Gehäuse oder Kloben nicht reiben. Die Axe der Rolle ist entweder in ihr fest, (Projektion A) in welchem Falle dann, wenn sie aus Holz angefertigt ist, in ihren beiden Seitenflächen metallene Platten mit vier-eckigen Löchern für die Aufnahme der Axe, eingelassen und mittelst Holzschrauben befestigt sind; oder sie ist mit dem Gehäuse in fester Verbindung, dann hat die Rolle ein Loch, das auf beiden Seitenflächen mit metallenen Büchsen ausgefüttert ist. (Projektion B).

Ist nun eine ähnliche Rolle mittelst ihres Klobens aufgehangen und um dieselbe ein Seil gelegt (Fig. 5), so ist es augenscheinlich, daß während das eine Seiltrumm in einer bestimmten Richtung sich bewegt, das Andere sich in einer von dieser verschiedenen, jedoch in derselben Ebene befindlichen Richtung bewegen wird.

Derselbe Zweck wird durch die auf ihrem Umkreise gewölbten Riemenscheiben oder Trommeln (Fig. 6) erreicht. Die erwähnte Wölbung oder Convexität hat den Zweck, das Abgleiten des Riemens, wenn derselbe eine schiefe Abweichung von seiner ursprünglichen Richtung annehmen sollte, zu verhindern. Denn es ist eine besondere Eigenschaft der Riemen, daß sie während ihrer Bewegung immer die höchste Stelle der Trommel, um welche sie geschlungen sind, einzunehmen streben. Wäre der Umkreis dieser Scheiben concav statt convex, so würde der Riemen den dadurch gebildeten scharfen Seitenkanten nachgehen, und da er an diesen Stellen des Umkreises wenig Berührungspunkte findet, bald abfallen und die Bewegung unterbrechen.

Zuweilen sind um die Rollen oder Trommeln Ketten statt Seile geschlungen, und wenn jene recht biegsam sind, haben sie dieselbe Wirkung wie diese oder wie Riemen. Häufig aber erzeugen sie Erschütterungen und Reibungen, und um diese zu vermeiden, verlangen sie eine besondere Anordnung.

Eine Kette ist gewöhnlich aus flachlänglichen Ringen, die abwechselnd eine winkelrechte Richtung zu einander haben, zusammengesetzt (Fig. 7). Vertiefungen in dem Umfange der Rolle oder der Trommel nehmen die aufrechtstehenden Glieder auf und die andern legen sich flach auf den Umfang derselben. Wenn man befürchtet, daß die Ketten von der Rolle abglitten, so könnte man seitwärts derselben Ohren anbringen; allein diese Vorsicht scheint gänzlich unnöthig zu seyn.

Statt dieser gewöhnlichen Ketten verwendet man auch flache Ketten (Fig. 8), die sich mit den Kanten cd auf die Rolle auflegen und deren Glieder m, m, m durch Ringe n, n, n miteinander verbunden sind. Bei der Anwendung derselben ist es also nicht nöthig, daß für die Aufnahme der Zwischenglieder, Vertiefungen in dem Umfange der Rolle angebracht werden.

Endlich hat man noch die englischen Ketten (Fig. 9). Dieselben bestehen aus kreisförmig abgerundeten, bei p und q durchbohrten Platten, die mittelst Bolzen m m ꝛc. in der Art mit einander verbunden sind, daß zwischen zwei solchen Gliedern ein drittes placirt und durch die Bolzen mit dem Vorhergehenden und Nachfolgenden verbunden ist. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten p und q ist etwas größer, als der Durchmesser der Kreise, nach denen die einzelnen Glieder an ihren beiden Enden abgerundet sind. Der Spielraum zweier auf einander folgender Platten ist augenscheinlich der Differenz gleich, die man erhält, wenn man von dem Abstand der Löcher einer der Platten, den Durchmesser, nach welchem dieselben an beiden Enden abgerundet sind, abzieht.

Unter diesen drei Arten von Ketten muß man derjenigen den Vorzug geben, welche den mindesten schädlichen Widerstand während ihres Herumlegens um die Rolle erzeugt. Bei näherer Untersuchung der beiden letzten Arten erkennt man leicht, daß die Glieder desjenigen Theiles der Kette, der

sich nicht auf der Rolle befindet, eine gerade Linie bilden, und daß in dem Augenblick, wo sich dieselben um die Oberfläche der Rolle legen, immer zwei aufeinander Folgende einen Winkel mit einander einschließen, dessen Größe von dem Abstand zweier unmittelbar auf einander folgender Gelenke abhängt. Dieser Winkel ist auch derjenige, welchen jedes dieser Gelenke um seine Bolzen ganz auf dieselbe Weise, wie ein Zapfen in seinem Lager beschreibt; es ist augenscheinlich, daß der zwischen zwei Kettengliedern durch die Reibung entstehende Widerstand, im Allgemeinen, um so größer ist, je weiter diese Gelenke von einander entfernt sind, und daß der von dem Angriffspunkt dieses Widerstandes durchlaufene Weg dem vorhin betrachteten Winkel proportional sein wird. Die hier stattfindende Reibung ist ausserdem von der ersten Art (2 Abth. 121) und der am Ende der Kette stattfindenden Spannung proportional.

Bei der Anwendung der gewöhnlichen Kette ist der Fall möglich, daß die erzeugte Reibung ganz unmerklich werden kann. Um dies einzusehen, muß man das, was (2. Abth. 121) darüber gesagt worden, in nochmalige Erwägung nehmen: daß nämlich die Reibung in den Zustand der gleitenden Zapfenreibung erst in dem Moment übergeht, wenn der Neigungswinkel, der Tangente des Zapfens mit der Richtung des Druckes, durch den Reibungsconficienten μ gemessen wird, und daß so lange der Zapfen nicht in diese Lage gekommen ist, die Reibung nur eine wälzende oder von der zweiten Art ist*). Wenn wir also ein Kettenglied

*) Es seien (Fig. 9^a) a und b zwei Kettenglieder, wenn die Kette gerade ausgespannt ist, dagegen c und d (Fig. 9^b) dieselben in der auf dem Umfange der Rolle befindlichen Lage, wo die Linie mb die Richtung des Drucks und pq die Tangente an dem Berührungspunkt f bezeichnet; so lange also $\frac{mg}{gf}$ kleiner als μ ist, findet nur wälzende und keine gleitende Reibung statt.

indem es sich um sein unmittelbar folgendes dreht, betrachten, so befindet es sich in demselben Verhältniß, wie ein Zapfen zu seiner Unterlage, und wenn der Winkel zweier auf einander folgender Glieder die Grenze, wo die gleitende Reibung beginnt, nicht erreicht, so schließt man daraus auf alle Uebrigen, daß dieselben während ihres Herumlegens um die Rolle nur eine wälzende Reibung haben. Man kann also die ohnehin sehr einfachen gemeinen Ketten für die Anwendung viel vortheilhafter, als die beiden andern Arten machen, wenn man der Rolle oder Trommel einen solchen Durchmesser giebt, daß die Kettenglieder während ihres Herumlegens um dieselbe keine gleitende Reibung erzeugen können.

Wenn ein System von Riemen zur Fortleitung der Bewegung verwendet wird, und dieselben um eine Trommel von beträchtlichen Dimensionen geschlungen sind, so wird diese gewöhnlich aus Latten und zwei Scheiben, welche die Grundflächen eines Cylinders bilden, zusammengesetzt (Fig. 10); sind die Dimensionen der Trommel hingegen nicht bedeutend, so besteht diese nur aus einem massiven, auf die Bewegungsaxe aufgezogenen Cylinder. Alle die bis jetzt angeführten Beispiele beziehen sich ausschließend auf die Fälle, wo die Richtungen der beiden geradlinigen Bewegungen in einer und derselben Ebene liegen.

Untersuchen wir nun den Fall, wenn die Richtungen, nach welchen die Bewegung fortgepflanzt werden soll, in verschiedenen Ebenen liegen. Dann ist es nöthig, wenigstens zwei Rollen, und zwar in solchen Lagen anzuwenden, daß der Theil des Seils, welcher beide berührt, als die Durchschnittlinie zweier Ebenen, in denen man sich die Rollen liegend denkt, betrachtet werden kann (Fig. 11.). Ist also AB (Fig. 12.) eine Gerade in dem Raume, welche die Richtung einer gegebenen fortzupflanzenden Bewegung bezeichnet, und soll diese nach der Richtung der Geraden CD übertragen werden, so nehme man in denselben zwei Punkte E, F an, welche nahe an den Stellen liegen, wo die beiden Rollen angebracht werden sollen, und verbinde diese durch eine Gerade EF; ferner denke

man sich in den beiden Ebenen B E F und E F D zwei Kreise gezogen, von denen der Eine die beiden Linien AB und EF, der Andere die Linie CD und EF tangirt, und die Aufgabe ist gelöst. Diese Art der Umwandlung der Bewegung zeigt sich da sehr nützlich, wo eine continuirliche gerad-linige Bewegung in beträchtliche Entfernungen übertragen werden soll, und wo dazwischen befindliche Hindernisse es nothwendig machen, die Richtung der Fortleitung zu unterbrechen. Dies ist besonders der Fall, wenn man die Bewegung von einem Ende eines Gebäudes zu dem andern in Krümmungen fortführen soll.

Man hat noch andere Mittel zur Lösung des so eben betrachteten Falles vorgeschlagen, aber die meisten sind entweder mangelhaft oder zu complizirt. Eines der einfachsten derselben soll hier — jedoch nicht zur Nachahmung, sondern vielmehr deswegen, um dessen unzweckmäßige Construction zu zeigen — angeführt werden.

Ein Keil A (Fig. 13), kann nach der Richtung seiner Länge zwischen vier Pfeilern c, d, e, f (wovon in der Zeichnung nur zwei sichtbar sind) vor- oder rückwärts geschoben werden, während daß ein Anderer B durch Stifte, oder noch besser — um die Reibung zu vermindern, — durch Rollen k, g, h, i, welche die Pfeiler berühren, und deren Axen in dem Keile befestigt sind, in einer solchen Lage erhalten wird, daß er sich nur auf und abwärts bewegt. Es ist einleuchtend, daß wenn man den Keil A nach der Richtung des Pfeils schiebt, die Kante mn des Andern sich vertical erheben und mit ihrer ursprünglichen Lage parallel bleiben wird. Die Reibung ist aber in dieser Vorrichtung außerordentlich bedeutend, wie man sich überzeugen kann, wenn man das, was (2 Abth. 114. u. 116) über den Keil gesagt wurde, dabei in Erwägung nimmt. Ein ähnlicher Apparat ist gut, um Parallelen mn, nn zu ziehen*), aber er taugt nicht zum

*) Die Türell'sche Linienziehmaschine für Kupferstecher beruht auf diesem Princip.

Uebertragen der Wirkung der Kräfte. Die Keilpresse bietet zwar ein Beispiel der wirklichen Uebertragung der Bewegung auf diesem so eben bezeichneten Weg dar, aber dieselbe ist ein Operateur, und die Wirkung derselben ist nicht gleichmäßig fortdauernd, und findet nur durch aufeinanderfolgende Stöße statt.

Man hat für denselben Zweck noch ein Hülfsmittel, welches aus zwei Stäben ab und cd besteht, (Fig. 14.), die durch zwei gleich lange Schaniere mit einander verbunden sind und ein Parallelogramm bilden. Der Eine ab ist befestigt und der Andere bewegt sich mit sich selbst parallel. Diese Verbindung wird bei gewissen Maschinen, wo die Bewegung nicht dauernd ist, angewendet. So dient sie als Führer der Holztheile, welche man in paralleler Richtung der Wirkung einer Kreissäge darbieten will, und das Parallelogramm ist dann mehr oder minder schief gestellt, je nachdem der zu zerschneidende Theil mehr oder weniger dick ist. Wenn das Holzstück durch diese Vorrichtung in die richtige Lage gestellt ist, so wird es dann durch eine Zwinge festgehalten.

Das beste Mittel, einen Körper in gerader Linie und mit sich selbst parallel fortzubewegen, ist: ihn auf einem Wagen anzubringen, dessen metallene — mit doppelten Anläufen versehene — Räder sich auf parallelen eisernen Stäben bewegen. Diese Anwendung findet man in der Mul-Jenny Maschine, wo der Wagen, welcher die sämmtlichen Spindeln trägt, auf diese Weise construirt ist.

Für große Wägen, welche zum Transport der Materialien auf Eisenbahnen bestimmt sind, ist der Parallelismus der Bewegung auch nicht so strenge erforderlich, und man läßt hier einen der Anläufe der Räder gänzlich weg. (Fig. 15). Zuweilen bringt man auch seitwärts an den Wägen sehr genau gearbeitete gerade Leisten an, die in messingenen oder hölzernen Nuten gleiten (Fig. 16.). Auf diese Weise regelt man die Bewegung der Sägegattern und der Blockwägen in den Sägmühlen.

22. Umwandlung der continuirlichen geradlinigen Bewegung in continuirliche kreisförmige und umgekehrt. — Nach der so eben betrachteten Umwandlung der Bewegung gelangen wir ganz natürlich zu derjenigen, wodurch die continuirliche geradlinige in continuirliche kreisförmige Bewegung, oder diese in jene umgewandelt wird.

I. Der Haspel giebt bereits die doppelte Lösung dieser Frage. Man weiß, daß derselbe aus einer an seinen beiden Enden mit Zapfen versehenen Welle (Fig. 17) besteht, die sich mittelst einer Kurbel oder eines Rades um ihre Axe drehen läßt. Nehmen wir an, ein Seil sei einigemal entweder um die Welle oder um die Peripherie der Räder gewunden, und trage an ihren Enden ein Gewicht.

In dem ersten Falle, wenn man der Kurbel eine kreisförmige Bewegung ertheilt, wird sich das Gewicht in vertikaler Richtung erheben und bietet somit das Beispiel von der Umwandlung einer continuirlichen kreisförmigen Bewegung in continuirliche geradlinige dar.

In dem zweiten Falle hingegen, wo das von der Peripherie der Welle oder des Rades herabhängende Gewicht seiner eigenen Wirkung überlassen ist, wird dasselbe vertikal herabsteigen und den Haspel veranlassen, sich zu drehen; mit einem Wort, die continuirliche geradlinige Bewegung des Gewichts ist in eine continuirliche Kreisbewegung umgewandelt. Die Geschwindigkeiten dieser beiden, gleichzeitig stattfindenden, Bewegungen sind augenscheinlich dem Halbmesser der Welle und dem Halbmesser des Kreises, welchen die Warze der Kurbel durchläuft, proportional.

Wird die Bewegung mittelst Ketten übertragen, so ist die Welle auf ihrem Umfange für die Aufnahme derselben nach einer Schraubenlinie in der Art ausgehöhlt, daß die aufgewundenen Theile der Kette sich sehr nahe an einander legen, ohne sich jedoch zu berühren. Endlich in dem Falle, wo die Ketten so geformt sind, daß die Ebene des einen Kettengliedes senkrecht zur Axe der Welle, die des

folgenden parallel zu derselben und so abwechselnd ist, wird die Welle für die Aufnahme der stehenden Kettenglieder schraubenförmig ausgehöhlt, und die dazwischen befindlichen legen sich dann auf dem Umfange derselben auf. Letztere Anordnung ist bei den englischen Krahnen in den Werkstätten zu Charenton angewendet worden.

Es giebt eine Art Haspel, dessen Anordnung von der Beschaffenheit ist, daß die Geschwindigkeit der zu hebenden Last noch so klein in Vergleichung mit der Geschwindigkeit des Rades oder der Kurbel, welche ihn in Bewegung setzt, genommen werden kann; derselbe führt den Namen G e g e n w i n d e und scheint aus China zu stammen. Seine Welle besteht aus zwei Theilen von verschiedenen Durchmessern (Fig. 18.). Die zu erhebende Last ist an einer beweglichen Rolle befestigt, und die beiden Enden des um dieselbe gelegten Seils sind an den beiden Theilen der Welle in der Art angebracht, daß während der Bewegung derselben das Eine sich auf-, das Andere sich abwickelt.

Man ersieht hieraus, daß bei jedem Umgang des Haspels die Last um eine Größe, die der Hälfte der Differenz der Peripherien beider verbundenen Wellen gleich ist, erhoben wird. Nun ist die Arbeit der an der Kurbel wirkenden Kraft während eines Umgangs $= P \times C$, wenn C den Umfang des von der Warze der Kurbel beschriebenen Kreises bezeichnet; ist nun Q die Größe der zu hebenden Last und sind R und R', die Halbmesser der beiden Theile der Welle, so ist:

$$Q \times \frac{2\pi R - 2\pi R'}{2}$$

die Arbeit des Widerstandes der Last während eines Umgangs. Wenn man also von den passiven Widerständen abstrahirt, so hat man

$$P \times C = Q\ (\pi R - \pi R') = Q\pi\ (R - R')\ ^{*)}$$

*) Mittelst des Lehrsatzes der Momente ergiebt sich dieser Ausdruck folgendermaßen. Es seyen R und R' die Halbmesser der Welle, A der Halbmesser des Rades oder der Kurbel, so ist:

Man sieht hieraus, daß bei gleicher Leistung der Kraft, die erhobene Last um so größer ist, je kleiner man die Differenz der Halbmesser nimmt, und daß man also mit einem solchen Apparat die stärksten Widerstände, ohne die Kraft zu vergrößern, zu überwinden im Stande sein wird.

II. Eine zweite Auflösung erlangt man mittelst eines Rades **A** (Fig. 19), welches auf eine zwischen Scheidelatten **aa**, **bb** oder zwischen Rollen **cc**, **dd** und **e** sich auf- und abwärts schiebende Stange die Bewegung dadurch überträgt, daß ein Riemen **CTC′** mit dem einen Ende **C** an der Stange, mit dem andern **C′** auf dem Umfang des Rades befestigt wird. Dreht sich nun dieses im entsprechenden Sinne, so wird die Stange erhoben. Bringt man auf ähnliche Art noch zwei andere Riemen **BTB′** im entgegengesetzten Sinne so an, daß zwischen ihnen ein passender Spielraum verbleibt, so wird bei der rückgängigen Bewegung des Rades die Stange von oben nach unten bewegt.

Die Riemen können auch durch englische Ketten, deren Construktion in § 21 angegeben wurde, ersetzt werden, was besonders in dem Falle nothwendig wird, wenn der, durch die Stange zu überwältigende Widerstand bedeutend ist.

$$R \times \frac{Q}{2} = R' \times \frac{Q}{2} + AP \text{ also } AP = \frac{Q}{2}(R - R')$$

Da $C = 2\pi Q$ ist, so erhält man, wenn auf beiden Seiten mit 2π multiplicirt wird, $2\pi AP = CP = Q\pi(R - R')$ wie oben. Wird bei der Bestimmung der Größe der Kraft P die Dicke des Seiles, — die in der Regel beträchtlich ist — mit berücksichtigt, und setzt man den Durchmesser desselben $= d$ so hat man auch:

$$\left(R + \frac{d}{2}\right)\frac{Q}{2} = \left(R' + \frac{d}{2}\right)\frac{Q}{2} + AP, \text{ oder } AP = \frac{Q}{2}(R - R')$$

Man ersieht hieraus, daß die Wirksamkeit dieser Maschine von der Dicke des Seiles, in sofern die passiven Widerstände nicht berücksichtigt werden, ganz unabhängig ist.

Zuweilen versieht man auch das Rad mit Zähnen, welche in eine, dasselbe tangirende, Kette ohne Ende eingreifen. (Fig. 20.). Aber diese Anordnung ist fehlerhaft, weil sie Ungleichheiten und viele Reibung verursacht, und die Kette während der Bewegung Oscillationen, die sie aus dem Eingriffe zu bringen suchen, erleidet; soll diese Anordnung einigermaßen brauchbar seyn, so müssen die Kettenglieder ganz gleich seyn und mit vieler Sorgfalt bearbeitet werden.

III. Die entsprechendste Anordnung für kräftig wirkende Maschinen ist diese, daß man die Stange mit Zähnen versieht, in welche das gleichfalls gezähnte Rad eingreift; in diesem Falle nimmt alsdann die Stange den Namen Zahnstange an (Fig. 21.); später wird man die Construction der Zähne derselben angeben.

IV. Die Schraubenmutter und die Schraube (Fig. 22) sind noch ein Beispiel der Umwandlung der continuirlichen Kreisbewegung in continuirliche Geradlinige. Bald ist es die Schraube, welche sich um sich selbst dreht, wo alsdann die Schraubenmutter, welche dieser Rotationsbewegung nicht folgen kann, einen in der Richtung der Axe der Schraube geraden Weg durchläuft; bald ist es die Schraubenmutter, welche sich dreht, und durch diese Bewegung die Schraube hebt und senkt. Von dieser Maschine haben wir speciell in dem § 136—141 des zweiten Abschnittes gehandelt. Diese Umwandlung der Bewegung ist mit einer ausserordentlichen Reibung begleitet, deshalb muß man sie allemal, wenn z. B. Materialien mit großer Kraft zusammen gepreßt werden sollen, oder der arbeitende Theil der Maschine einen sehr beträchtlichen Widerstand zu bezwingen hat, vermeiden. (Man sehe in dieser Hinsicht die verschiedenen, schon oben angezeigten Paragraphen der zweiten Abtheilung.)

Prony hat eine neue Art, die kreisförmige Bewegung in eine geradlinige umzuwandeln, deren Geschwindigkeit noch so klein sein kann, angegeben. AB (Fig. 23) ist eine in drei Theile getheilte Axe oder dreifache Schrauben-

spindel ab, cd, ef; die beiden Schraubengewinde ab und cd haben dieselbe Steigung und drehen sich in den beiden fest mit einander verbundenen Trägern C und D, zu welchem Zweck in denselben die der Schraube entsprechenden Muttergewinde eingeschnitten sind. Die Axe bewegt sich also horizontal in dem Sinne EE und für jeden Umgang durch einen Weg H′ der der Steigung dieser Schrauben gleich ist. c d ist eine andere Schraube, deren Steigung größer, als die der eben Betrachteten ist, und welche sich ebenfalls in dem, in dem Theil M eingeschnittenen, Muttergewinde bewegt, das sich nicht um seine Axe drehen, wohl aber auf der Sohle EF vor- und rückwärts gleiten kann, und während eines Umganges der Schraube von E nach F einen Weg H durchläuft. Wird nun die Schraubenspindel einmal herum gedreht, so durchläuft sie selbst von E nach F einen Weg gleich H′, und es ist augenscheinlich, daß in derselben Zeit der Theil M auf der Schraubenspindel den Weg H durchläuft, folglich ist der Weg, den sie auf der Schraube EF zurücklegt, gleich H—H′ eine Differenz, die man noch so klein machen kann, ohne daß die Steigung der Schrauben deshalb zu klein genommen werden müsse. Dieser Apparat kann vortheilhaft als Führer der Linien-Zieher, wo die Bewegung sehr langsam sein muß, oder zur Bewegung des Fadenkreuzes in Fernröhren verwendet werden. Die Vorrichtung, welche man Mikrometerschraube nennt, ist auf diese Art construirt.

23. Umwandlung der continuirlichen Kreisbewegung in eine andere Aehnliche. — Um eine continuirliche Kreisbewegung in eine andere Aehnliche umzuwandeln, ist es hinreichend, einen Riemen oder eine Schnur ohne Ende um beide Rollen, Scheiben oder Trommeln, die auf den parallelen Bewegungsaxen angebracht sind, herumzulegen. Aber man muß dabei vermeiden, daß die Riemen auf den Oberflächen der Rollen nicht gleiten; denn dieses Gleiten würde sie an der gleichförmigen Uebertragung der Bewegung hindern. Je beträcht-

licher der umspannte Bogen derselben ist, desto größer ist die Reibung zwischen den Riemen und der Oberfläche der Rolle, und desto weniger ist das Gleiten derselben zu befürchten. Man hat daher in diesem Falle besonders darauf Rücksicht zu nehmen, daß jede der beiden Trommeln wo möglich zur Hälfte von den Riemen umspannt werde (Fig. 24). Sind aber die Halbmesser derselben klein, so genügt in vielen Fällen die halbe Umspannung der Rollen nicht mehr, und man kreuzt dann die Riemen (Fig. 25); eine Anordnung, die ausserdem noch den Vortheil hat, daß sie die Richtung der Bewegung umkehrt. Will man noch mehr versichert sein, daß die Riemen nicht gleiten, so legt man sie mehrmal um die Rolle, wie solches bei den gewöhnlichen Dachbogen (Fig. 26) geschieht. Das, was besonders die Anwendung der Riemen oder Schnüre empfiehlt, ist: daß man mittelst derselben die Kreisbewegung in jeder beliebigen Richtung übertragen kann.

Um den Druck und folglich die Reibung der Riemen zu vermehren, kann man die eine Rolle, um welche derselbe läuft, so anordnen, daß ihre Axe mittelst einer Schraube zurückgezogen werden kann, aber in den meisten Fällen erscheint diese Anordnung als fehlerhaft und unanwendbar. Besser ist noch die Anwendung der Spannrolle (Fig. 27), welche an einem festen Punkt aufgehangen ist, und mit Hülfe eines Gewichtes oder eines kleinen Haspels oder auf irgend eine andere Weise gegen den Riemen gedrückt wird. Aber alle diese Correktionen vermehren die Reibung in den Lagern der Axen, oder die schädlichen Widerstände.

Das einfachste Mittel besteht darin, die Bewegung durch zusammengesetzte Riemen, die man beliebig verkürzen kann, wenn sie sich dehnen, überzutragen, und wenn die in ihrer Richtung sich äußernde Kraft schwach ist, die Oberfläche der Rollen mit Bändern von Büffelleder zu umgeben, deren rauhe Seite auswärts gekehrt ist. Durch die Berührung derselben mit den herumliegenden Riemen entsteht ein gegenseitiges Ineinandergreifen der Narben des Leders, und so angeordnete

Riemen sind hauptsächlich da anwendbar, wo eine sanfte Bewegung stattfinden soll. Auch werden dieselben bei den Sackzügen der amerikanischen Mahlmühlen angewendet.

In den Fällen, wo die Maschinen eine sehr kräftige Wirkung äussern müssen, wie dies von den meisten, für industrielle Zwecke bestimmten, verlangt wird, nimmt man seine Zuflucht zu den gezähnten Rädern, um eine kreisförmige Bewegung in eine andere Aehnliche umzuwandeln. Man unterscheidet drei Hauptfälle. 1° wo die Axen der Räder mit einander parallel laufen. 2° wo zwar beide in derselben Ebene liegen, aber einen gewissen Winkel mit einander bilden. 3° wo ihre Richtungen von der Art sind, daß sich dieselben in dem Raume nicht begegnen. In dem ersten Falle haben die Räder — in so ferne man sich dieselben noch ohne Zähne denkt — die Form von Cylindern, deren Axen mit denen der Räder zusammenfallen (Fig. 28). Was die Form der Zähne derselben betrifft, so werden wir später darauf zurückkommen. In dem zweiten Fall können die Räder nicht mehr cylindrisch seyn, weil sie sich gegenseitig durchdringen müßten, was jedoch nicht stattfinden kann. Wenn man ihnen aber eine kegelförmige Form giebt, deren gemeinschaftlicher Scheitel mit dem Durchschnittspunkt **S** der beiden Axen **SA, SB** (Fig. 29) zusammenfällt, so sind diese Räder ganz geeignet, die Bewegung aufeinander überzutragen. Die cylindrischen Räder sind durch Ebenen senkrecht zu ihren Axen begrenzt; dasselbe kann aber nicht der Fall bei kegelförmigen Rädern seyn, denn diese werden durch andere Kegel umgeben, welche eine gemeinschaftliche Kante **AB** haben, die wieder senkrecht zu der Berührungslinie **ST** der beiden Kegel ist. Innerhalb sind ihre Grenzen Kegel, die mit den äußeren parallel sind, wie solches die Fig. 30 zeigt. Endlich im 3. Fall, wenn die beiden Axen sich nicht begegnen, ist man genöthigt, drei conische Räder zur Übertragung der vorgeschriebenen Bewegung anzuwenden. Sind **AB** und **CD** (Fig. 31) die gegebenen Richtungen der Axen, so zieht man eine Gerade **EF**, die beide durchschneidet, und betrachtet diese als die Axe

eines doppelten Kegelrades a, das sich zwischen den beiden Rädern b und c befindet, und wodurch die Bewegung von dem Rade b auf dasjenige c übertragen wird. Die Lagen der Axen AB und CD sind gewöhnlich durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben. Man könnte zwar in diesem dritten Fall auch die Bewegung unmittelbar von der Axe AB auf diejenige CD übertragen, allein die hiefür zu Gebote stehenden Hülfsmittel sind zu complicirt und daher als mangelhaft zu betrachten.

In Betreff der gezähnten Räder bleibt noch eine letzte Frage zu beantworten, nämlich die: wenn die Bewegung in einem gegebenen Verhältniß übertragen werden soll. Zwei Räder von gleichen Halbmessern, welche sich durch bloße Berührung bewegen, drehen sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit, weil die von ihren Peripherien gleichzeitig abgewickelten Bögen einander gleich sind und durch dieselben Mittelpunktswinkel gemessen werden. Sind die Halbmesser ungleich, so sind zwar die von beiden Peripherien abgewickelten Längen der Bögen einander gleich, aber die zugehörigen Mittelpunktswinkel sind es nicht mehr; folglich sind die Winkelgeschwindigkeiten beider Räder ungleich. Denn macht das eine Rad a (Fig. 32) zwei, drei Umdrehungen, während das Andere b nur eine macht, so muß auch die Peripherie des Erstern zwei, dreimal in derjenigen des Letztern enthalten sein. D. h. der Halbmesser von jenem ist in diesen beiden Fällen nur $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ des Halbmessers von diesem. Nennt man R den Halbmesser CT des Rades a und ψ die Winkelgeschwindigkeit eines Punktes derselben, der um die Einheit vom Mittelpunkt C absteht (2 Abth. 60), so ist $R\psi$, die in der Peripherie gemessene wirkliche Geschwindigkeit, ferner sey R′ der Halbmesser des Rades b und ψ' dessen Winkelgeschwindigkeit, so ist die in der Peripherie stattfindende wirkliche Geschwindigkeit $R'\psi'$. Es muß aber

$$R\psi, = R'\psi'$$

sein, und man hat alsdann die Proportion

$$R : R' = \psi' : \psi$$

Hat man also die Lage und die Entfernung CC′ der beiden Mittelpunkte der Räder, und theilt man CC′ in der Art in zwei Theile, daß sich CT zu TC′ umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten der Räder a und b, oder wie die Zahl der Umdrehungen derselben in einer gegebenen Zeit verhalten, so sind die erhaltenen Theile CT und TC′ die Halbmesser derjenigen Kreise, welche man **Grundkreise** der Bewegung nennt.

In Betreff der kegelförmigen Räder, findet dasselbe Verhältniß in Bezug auf diejenigen Kreise, die in einem Punkte der Berührungskante derselben zusammenstoßen, statt. Gewöhnlich betrachtet man die Kreise CT und C′T (Fig. 33) als die Mitte der Oberfläche beider Räder; und da beide Kegel einen gemeinschaftlichen Scheitel haben müssen, wenn sie, während sie auf einander rollen, in Berührung mit einander bleiben sollen, so ist es leicht, die Scheitelwinkel dieser Kegel in der Voraussetzung zu bestimmen, daß die Winkelgeschwindigkeiten beider Räder ein gegebenes Verhältniß zu einander haben, und die Lage ihrer Axen gegeben ist.

Die Perpendikulairen TC und TC′ zu diesen Axen, sind mittlere Halbmesser, die in dem bezeichneten Verhältniß zu einander stehen müssen. Zieht man nun die Linien mm′ und nn′ parallel mit den gegebenen Axen SC und SC′ und in Abständen, die den Senkrechten TC und TC′, gleich sind, so schneiden sich dieselben in T, welches derjenige Punkt ist, wo beide Kreise an einander stoßen oder sich berühren, und welcher zugleich in der gemeinschaftlichen Kante TS beider Grundkegel liegt.

24. Andere Beispiele der Umwandlung der continuirlichen kreisförmigen Bewegung in eine andere Aehnliche. — Das **allgemeine** oder **gebrochene Gelenke** ist ein Bestandtheil mancher Maschine, welches irgend zwei Axen in der Weise vereinigt, daß die Eine die ihr mitgetheilte Bewegung auf die Andere überzutragen im Stande ist, wenn auch Beide nicht in derselben Ebene liegen. A und B sind die bei-

den Axen der Bewegung, jede trägt an ihrem Ende einen Kloben, der sich um zwei einander entgegengesetzte Bolzen oder Zapfen aa oder bb, die in einem Kreuzstück C befestigt sind, drehen kann. Die Figuren 34 bis 37 stellen das allgemeine Gelenke, und zwar Fig. 34 die Perspective, und die drei andern Figuren die verschiedenen Projektionen der Kloben und des Kreuzstückes dar.

Das Letztere besteht, wie es Fig. 35. zeigt, aus zwei kreuzweis verbundenen Cylindern aa, bb. Statt dieser Form bedient man sich zuweilen einer Kugel (Fig. 36), die in einen größten Kreis ihrer Oberfläche vier gleichweit von einander abstehende Zapfen trägt. Um das Spiel dieser allgemeinen Gelenke gehörig zu verstehen, erwäge man, daß die der Welle A eingedrückte Bewegung vermittelst des mit ihr verbundenen Klobens D sich auf das Kreuzstück C überträgt; welche Lage auch dasselbe in Bezug auf die beiden Arme des Klobens D jeden Augenblick haben mag, indem es sich, wie wir bereits gesehen haben, um die Zapfen aa drehen kann; weil aber diese mit dem Kreuzstück zusammen nur ein einzelnes solides Stück bilden, so ist es augenscheinlich, daß die beiden andern, ebenfalls mit demselben verbundenen Zapfen bb, welche sich in den Armen des Klobens D′ der zweiten Welle B drehen, auf diese in derselben Weise die Bewegung übertragen, wie sie dieselbe zuvor von der Welle A eingedrückt erhalten haben. Diese sehr einfache Verbindung paßt indessen nur für Maschinen von mäßiger Wirkung, oder wenn man sie ja bei solchen von kräftiger Wirkung anwenden will, darf der spitzige Winkel, den die Richtungen beider Axen einschließen, nicht sehr groß seyn. Dasselbe kann z. B. mit gutem Erfolg zur Verbindung zweier sehr langer Wellen, welche auf mehreren Stützpunkten, die schwierig in dieselbe gerade Linie zu bringen sind, sich drehen, angewendet werden. Die Drückungen auf die Gelenke sind ausserordentlich, wenn der Winkel beider Axen bedeutend ist, und verursachen sehr viel Reibung, obgleich der Angriffspunkt dieses Widerstandes nur einen sehr kleinen Weg

durchläuft. Dieser Communicateur wurde in Holland zur Uebertragung der Bewegung der horizontalen Axe einer Windmühle auf eine Archimedische Schraube, die, wie man weiß, gegen den Horizont geneigt ist, zuerst angewendet. —

Die Schraube ohne Ende, wovon im 2. Abschnitt 142 gesprochen wurde, ist gleichermassen ein Beispiel von der Umwandlung der continuirlichen Kreisbewegung in eine Aehnliche um Axen, die einen rechten Winkel miteinander bilden und nicht in derselben Ebene liegen. Eine mit scharfkantigen Gängen versehene Schraube ist mit einer, in zwei Lagern sich drehenden Welle verbunden, die an einem Ende eine Kurbel trägt, an welcher die Kraft wirkt (Fig. 38). Diese Schraube greift in die Zähne eines Rades ein, das in der Ebene, die durch die Axe der Schraubenwelle geht, sich befindet, und schiebt sie während ihrer Umdrehung immer in derselben Richtung vorwärts. In Folge dieser Bewegung dreht sich, das Rad um seine Axe und ist somit zur Erhebung einer Last, die an einem um die Welle desselben gelegten Seile angehangen ist, geeignet.

Man kann also das Rad mittelst der Schraube in Bewegung setzen, aber der umgekehrte Fall kann nicht stattfinden.*)

Hätte das Rad die Bestimmung, die Schraube in Bewegung zu setzen, so würden dessen Zähne gegen die Schrau-

---

*) Wenn die Neigung der Schraubenfläche gering ist, findet allerdings diese Behauptung statt. Ist aber diese Neigung beträchtlich größer, als der Reibungswinkel (2. Abth. 106), so wird das gezähnte Rad durch seine Einwirkung auf die Schraube, diese in eine rotirende Bewegung zu versetzen, im Stande seyn (2. Abth. 142 Anmerk.). Schrauben mit ziemlich steil ansteigenden Gängen werden daher mit Erfolg als Regulateure, um die Bewegung eines Räderwerks gleichförmig zu machen, verwendet. Man sehe deshalb den Abschnitt IV über die Regulateure.

benfläche einen Druck, parallel mit der Are der Schraube, ausüben, der mit dem Vertikaldruck eines Körpers gegen eine geneigte Ebene, deren Neigung dieselbe, wie die der Schraubengänge ist, verglichen werden kann. Nun ist es augenscheinlich, daß, wenn der vertikale Druck Q eines Körpers gegen eine schief liegende Ebene AC (Fig 39) noch so groß ist, doch niemals ein Herabsteigen derselben längst dieser Ebene verursacht wird. Denn die Reibung, welche zwischen beiden stattfindet, wächst mit dem Drucke, und wenn die Neigung der Ebene von der Art ist, daß keine Bewegung auf derselben entstehen kann, so erzeugt sich auch dieselbe nicht, wenn der Druck noch so sehr vergrößert wird. Wird hingegen an dem Keile ABC in der Richtung BA eine Kraft P angebracht, und der Körper Q kann sich zwischen den Rollen g, g, g, g vertikal verschieben, so ist es nicht schwierig, ihn mittelst dieser Kraft in vertikaler Richtung zu bewegen. Betrachten wir jetzt die Schraube ohne Ende wieder, so erkennt man ohne Mühe, daß die Wirkung der Radzähne gegen die Schraubengänge, welche parallel mit der Are des Letztern stattfindet, keine Bewegung hervorzubringen vermag, wie groß auch die Kraft sey, welche diese Wirkung erzeugt, daß hingegen diese Bewegung mit Leichtigkeit statt finden wird, wenn die Kraft rechtwinklig zu dieser Wirkung sich äußert, d. h. wenn dieselbe an der Schraube (an der damit verbundenen Kurbel) angebracht wird. Wenn wir uns dessen erinnern, was (3 Abth. 3) im Allgemeinen über die Maschinen gesagt wurde, so überzeugen wir uns von der Wahrheit dieses Prinzips, daß allemal, wenn an einem der Arbeitspunkte einer Maschine (z. B. an dem Kraftpunkt) eine Wirkung statt findet, wodurch man sie leicht in Bewegung versetzen kann, das Gegentheil statt finden wird, wenn man diese Wirkung an dem Andern (dem Arbeitspunkte) applicirt. In der That, da eine Maschine in der Regel den Zweck hat, die Leistung $P \times V$ der bewegenden Kraft in eine Arbeit $p \times v$ des Operateurs umzuändern, und, wenn man von den statt-

findenden Reibungswiderständen abstrahirt, jene Leistung dieser Arbeit gleich sein wird, so ist es klar, daß wenn V, oder der von dem Angriffspunkte der bewegenden Kraft durchlaufene Weg sehr klein in Vergleichung mit dem Weg v des Operateurs ist, die Kraft P in Gegentheil sehr groß sein wird, wenn man sie mit derjenigen p, die der Operateur äußert, vergleicht. Aus diesem Falle kann man auch abnehmen, daß es sehr leicht ist, die Maschine in Bewegung zu setzen, wenn man die Kraft an dem Arbeitspunkt des Operateurs anbringt; dagegen sehr schwierig, wenn dieselbe an dem Recepteur applicirt wird. Zieht man z. B. an dem Hebel eines Göpels, der irgend ein System in Bewegung setzt, und dessen Operateur eine große Geschwindigkeit besitzt, so wird derselbe einen beträchtlichen Widerstand entgegen setzen; sucht man aber unmittelbar an dem Operateur die Bewegung hervor zu bringen, so wird die Maschine schon einer mäßigen Kraft nachgeben.

Die Kreissäge, welche gewöhnlich eine sehr große Geschwindigkeit in Vergleich mit dem Angriffspunkt der bewegenden Kraft besitzt, wird den ganzen mit ihr in Verbindung stehenden Mechanismus in Bewegung setzen, wenn man sie z. B. mit der Hand an ihrer äußern Peripherie ergreift und herumdreht, während daß dieselbe Kraft an dem Rade derselben, welches den ersten Eindruck der bewegenden Kraft aufnimmt, angebracht, beinahe wirkungslos seyn wird.

In dem eben gegebenen Beispiel über die geneigte Ebene sind die durchlaufenen Wege der Kraft P und des Druckes Q der Basis und der Höhe dieser Ebene proportional. Ist dieselbe Ebene sehr wenig geneigt, so ist das Verhältniß der Basis zu der Höhe derselben beträchtlich, und es ist sichtbar, daß dann die Kraft P nur ein geringer Theil von dem Drucke Q ist. Durch analoge Schlüsse überzeugt man sich, wie leicht es ist, mittelst einer Schraube ohne Ende

ein gezähntes Rad in Bewegung zu setzen, und wie schwierig, oder vielmehr unmöglich es sey, die umgekehrte Bewegung zu erlangen. Wir schließen diese Betrachtungen mit der Bemerkung, daß die Schraube ohne Ende sehr viel Kraft durch die Reibung consumirt, und daß dieselbe nicht bei kräftig wirkenden Maschinen, wo man hinsichtlich der Verwendung der bewegenden Kraft ökonomisch verfahren muß, angewendet werden darf. Uebrigens ist sie wegen der Regelmäßigkeit ihrer Bewegung in allen den Fällen mit Nutzen zu verwenden, wo man eine Arbeit mit Präcision verrichten will.

25. **Umwandlung der continuirlichen Kreisbewegung in eine geradlinige Wechselseitige, und umgekehrt.** — Indem wir in Nachfolgendem die Umwandlung der continuirlichen Kreisbewegung in eine geradlinige Wechselseitige, und dann wieder Diese in Jene zusammenfassen, meinen wir nicht, daß die zu diesem Zwecke verwendeten Mittel auch wechselseitig dieselben seyen, sondern wir betrachten nur deshalb diese beiden Fälle gleichzeitig, um unnöthige Wiederholungen zu vermeiden. Das passendste Mittel, um eine kreisförmige Bewegung in eine geradlinige Wechselseitige umzuwandeln, besteht darin, daß man die mit der rotirenden Axe vereinigte Kurbel mit einer Stelze (Kurbelstange) verbindet, die mit ihrem andern Ende einen zwischen Nuten oder Falzen bewegbaren Körper wechselsweise hin und her schiebt. A (Fig. 40) ist eine Welle, die sich um ihre Axe dreht, und mit welcher eine Kurbel fest verbunden ist; um die Warze B derselben kann sich die mit derselben verbundene Stelze BC ohne Hinderniß drehen, und trägt somit die ihr mitgetheilte Bewegung mittelst ihrem andern Ende auf den Körper D über, so daß dieser während einer halben Umdrehung EBF der Kurbel einmal vor- oder aufwärts und während der andern halben Umdrehung FGE wieder rück- oder abwärts bewegt wird. Der Hauptvortheil dieser Verbindung ist, daß die Geschwindigkeit und die Wirkung nur in un-

merklichem Grade gegen das Ende und den Anfang jeder Bewegung des Körpers D, oder nach jedem halben Umgange der Kurbel sich verändert, und daß die Theile sich nicht von einander trennen, folglich weder einen Stoß, noch eine schädliche Erschütterung erleiden. Denn die Geschwindigkeit am obern Ende C der Stelze ist Null, wenn die Warze der Kurbel auf der geraden Linie AC in die Punkte E und F gelangt, hingegen ist die Geschwindigkeit am größten in den, zwischen diesen Punkten, mitten innen befindlichen Lagen der Warze, und es nimmt folglich dieselbe graduell ab und zu. Diese periodische Veränderung der Bewegung, in Folge welcher die Geschwindigkeit in denselben Lagen der Kurbel auch immer wieder dieselbe wird, verbleibt, der Durchmesser der Warze B mag größer oder kleiner seyn, und man kann daher dieser jede beliebige Dimension geben, ohne die Natur der einmal festgesetzten Bewegung zu alteriren; nur muß der Abstand der Mittelpunkte von A und B (Fig. 41) immer derselbe bleiben, und man sieht also, daß die wechselseitige Bewegung des Körpers D sich ebenfalls nicht verändert und immer der doppelten Distanz dieser Mittelpunkte gleich ist.

Wenn der Durchmesser der Warze B sich über die feste Axe A hinaus vergrößert, ohne daß sich der Abstand der beiden Mittelpunkte A und B verändert, dann nennt man diese Vorrichtung eine excentrische Scheibe oder einen Kreis, welcher sich um einen, von seinem Mittelpunkt um eine gegebene Größe abstehenden Punkt dreht. Die Lenkstange besteht alsdann in einem getheilten, durch Schrauben verbundenen Ringe (Fig. 42), der sich mit mäßigem Spielraum in einem in der Peripherie der excentrischen Scheibe angebrachten Falze dreht, und aus zwei damit vereinigten Schienen, die in gleichen Abständen mit kreuzweise gestellten Stäben fest verbunden sind, und dieser Verbindung die erforderliche Festigkeit geben. Diese Vorrichtung, wo ein Kreis um einen andern sich herumdreht, dessen Mittelpunkt nicht mit dem der festen Axe zusammenfällt,

ist bei Dampfmaschinen angewendet, um die Ventile abwechselnd zu öffnen und zu schließen.

Zuweilen, wenn die excentrische Scheibe sehr groß ist, besteht dieselbe aus einem einfachen Ringe, welcher mit der festen Axe **A** mittelst Armen (Fig. 43) verbunden ist. Obgleich der Weg, welchen der Endpunkt einer, durch eine excentrische Scheibe bewegten, Stelze durchläuft, nur von der Distanz zwischen ihren Mittelpunkte und der festen Axe, um welche sie sich dreht, und nicht von ihrer Größe abhängt, so ist dies dennoch nicht dasselbe mit der durch die Reibung der Stelze in der Falze der excentrischen Scheibe absorbirten Kraft oder Arbeit; denn diese vermehrt sich mit der Vergrößerung der Peripherie der excentrischen Scheibe und kann unter Umständen ein Vielfaches des nützlichen Effekts, welchen die Stelze übertragen soll, werden. Nennt man **P** die Kraft, welche durch die Stelze ausgeübt wird, **R** die Entfernung des Mittelpunkts der excentrischen Scheibe vom Mittelpunkt der mit ihr verbundenen Welle, so ist der Weg, welcher während eines Wechsels in gerader Linie durchlaufen wird, $2R$, und der Endpunkt der Stelze durchläuft also während einer vollständigen Umdrehung der excentrischen Scheibe, oder während eines Hin- und Herganges der Stelze, den Weg $4R$, und die in derselben Zeit durch letztere übertragene Arbeit wird also $4PR$ sein. Anderseits ist die zwischen der Stelze und dem Falze der excentrischen Scheibe hervorgerufene Reibung dem Drucke **P** proportional oder gleich μP, — wo μ den, in den Tafeln (2 Abth. 106) angegebenen, Coefficienten bezeichnet, welcher von der Natur der Substanzen, woraus die Stelze und die excentrische Scheibe bestehen, abhängig ist. —

In der Voraussetzung, daß die Stelze während ihrer Bewegung so ziemlich mit sich selbst parallel verbleibe, durchläuft der Angriffspunkt der Kraft in dem Falze der excentrischen Scheibe während einer vollständigen Umdrehung derselben einen Weg, der ihrer Peripherie gleich ist. Nennt

4 *

man nun r den Halbmesser der excentrischen Scheibe, so repräsentirt

$$2\pi r . \mu P$$

die durch die Reibung absorbirte Arbeit. Theilt man diesen Ausdruck durch den des nützlichen Effekts $4PR$, so erhält man für ihr Verhältniß den Quotienten

$$\frac{2\pi r . \mu . P}{4P . R} = \frac{\pi . \mu . r}{2R}$$

Wäre zum Beispiel, der Coefficient $\mu = \frac{1}{6}$ und der Halbmesser r der excentrischen Scheibe das sechsfache des Abstandes beider Mittelpunkte A und B (ein Fall, der oft stattfindet) also $r = 6R$, so wird dann

$$\frac{\pi \mu r}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

Da nun π das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser des Kreises ist, und man also $\pi = 3{,}1415$ hat, so ist das Verhältniß des durch die Reibung consumirten zu dem des nützlichen Effektes $= 1{,}57$, folglich der mittelst der Welle übertragene Effekt $= 1 + 1{,}57 = 2{,}57$, oder beiläufig zwei und ein halbmal so groß, als die durch die Stelze verrichtete nützliche Arbeit. Dieses Beispiel zeigt, welch enormer Verlust an Kraft durch die Anwendung der excentrischen Scheibe entsteht*). Dennoch wird dieselbe mit Vortheil bei den Dampfmaschinen zu dem oben bezeichneten

*) Man kann die Wirkung einer excentrischen Scheibe mit derjenigen einer Kurbel vergleichen, deren Lenkstange sich um einen unverhältnißmäßig dicken Zapfen (Warze) dreht; hier steht der Reibungswiderstand in dem Verhältnisse mit dem Halbmesser, und ein Theil der verwendeten bewegenden Kraft geht bei diesem zu groß angenommenen Halbmesser des Zapfens auf zweckwidrige Weise verloren. Es ist daher die excentrische Scheibe nur da zulässig, wo eine Wirkung von geringer Intensität auf einen andern Punkt übertragen werden soll. In allen andern Fällen muß man die Kurbel oder eine andere dem Zwecke entsprechende Combination dafür substituiren.

Zwecke verwendet, weil die zur Bewegung der Ventile erforderliche Kraft nur ein sehr kleiner Bruchtheil der Totalkraft der Maschine ist. Man kann indessen aus dem Vorhergehenden folgern, daß man, um eine gegebene Disposition richtig beurtheilen zu können, nur die Reibungswiderstände, welche sich fortwährend erzeugen, mit der wirksamen Kraft vergleichen darf.

Anstatt einen einzelnen Arm als Kurbel zu verwenden, bedient man sich zuweilen eines gußeisernen Rades (Fig. 44), das in dem Abstande von der Axe, wo sich die Warze befinden soll, einen Zapfen trägt, der dann denselben Namen annimmt und die Bewegung auf die Lenkstange überträgt. Man muß ausserdem bei dieser Anordnung die Vorsicht gebrauchen, daß die Arme dieses Rades in der Gegend, wo sich die Warze befindet, verstärkt werden. Es ist leicht hieraus abzunehmen, daß diese Anordnung ganz analog mit derjenigen der Kurbel ist.

Im Allgemeinen nennt man jede Kurve, welche sich mit einer damit verbundenen Welle um eine feste Axe dreht, ohne daß sie mit derselben concentrisch ist, eine Excentricität, und dieselbe ändert allemal eine continuirliche kreisförmige Bewegung in eine geradlinige Wechselseitige um. Nehmen wir z. B. ein gleichseitiges Dreieck, dessen Mittelpunkt mit der Axe A (Fig. 45) einer drehenden Welle zusammen falle, sey unveränderlich mit dieser verbunden, und die drei Seiten des Dreieckes seyen durch drei Kreisbögen, die ihre Mittelpunkte in den Spitzen derselben haben, ersetzt, so ist es augenscheinlich, daß, wenn die rotirende Welle durch einen quadratförmig durchbrochenen vertikalen Theil BEDF hindurchgeht, und dieser abwechselnd auf den drei mit einander verbundenen Kreisbögen aufruht, derselbe nach einander durch die Umdrehung des Dreiecks um die Axe A auf und nieder geschoben wird. Die Größe der stattfindenden Verschiebung wird hier der Differenz Ac — Ah gleich seyn und für jede vollständige Umdrehung der Welle wird dieselbe

dreimal aufwärts und dreimal abwärts statt finden*). Betrachten wir noch einen andern Körper MN, (Fig. 46) der sich zwischen Rollen gg vertikal auf- und abwärts bewegen kann, und mit seinem ganzen Gewicht gegen eine herzförmig gestaltete Scheibe drückt, welche mit einer horizontal liegenden Welle fest verbunden ist und sich gleichzeitig mit dieser herum dreht. Nimmt man an, diese Scheibe bewege sich von der Rechten zur Linken, (wie es der beigesetzte Pfeil anzeigt) so wird der Körper MN so lange fortgehoben, bis der Punkt P in die Vertikale mn gelangt ist; hierauf wird, (während die Scheibe in der angenommenen Richtung fortfährt, sich zu bewegen), derselbe durch die Wirkung seines Gewichts wieder niedersteigen, und wenn der Punkt M in die Vertikale mn eingetreten ist, die aufsteigende Bewegung wieder beginnen u. s. w. Während eines Umgangs der Welle wird also der Körper MN um eine Größe die der Differenz AP — AQ gleich ist aufwärts und dann wieder niederwärts steigen. Die Natur dieser wechselseitigen Bewegung hängt hier gänzlich von der Form ab, die man der excentrischen Scheibe giebt. Gewöhnlich wird bei einer solchen Uebertragung der Bewegung verlangt, daß sie durchaus regelmäßig und gleichförmig vor sich gehe, wie dies z. B. bei Kolbenstangen erforderlich ist, und also für gleiche Winkel, welche die Scheibe um die Axe A beschreibt, der Körper MN um gleiche Größen erhoben werde. Zur Erreichung dieses Zweckes ist es also nothwendig, daß die Krümmung der excentrischen Scheibe diesen Bedingungen gemäß construirt werde, was nun folgendermassen geschieht.

---

*) Wenn (Fig. 45[a]) die Höhe h der quadratförmigen Oeffnung mnpq und die Größe d der Verschiebung gegeben sind, so findet man durch eine leichte Construction den Abstand r des Mittelpunktes c von a gleich $\frac{h+d}{2}$. Der Halbmesser der Welle, worauf dieser excentrische Theil befestigt werden soll, muß daher immer kleiner als $\frac{h-d}{2}$ sein.

Es sey A (Fig. 47) der Mittelpunkt der Welle, und Q und P die diesem am nächsten und am entferntesten liegenden Punkte der Kurbe, nach welcher die excentrische Scheibe geformt werden soll, so trage man auf der Geraden mn die Größe AQ von A nach b′ und theile AP—AQ, oder was dasselbe ist, b′P in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in Sechs, dann ziehe man aus A mit einem beliebigen Halbmesser, der jedoch größer als AP ist einen Kreis nBD und theile diesen von n anfangend, in eine doppelt so große Anzahl gleicher Theile, oder jeden der beiden Halbkreise nD, nB in dieselbe Anzahl gleicher Theile und verbinde die Theilpunkte I, II, III, ꝛc mit A. Ferner beschreibe man aus A mit den Halbmessern A1, A2, A3 ꝛc Kreisbögen, so werden dieselben die Halbmesser AI, AII, u. s. w. rechts und links in den aufeinander folgenden Punkten a, b, c ꝛc und a′, b′, c′ ꝛc durchschneiden; werden nun diese Punkte mit einander durch eine Kurve verbunden, so stellt die dadurch erhaltene Figur P, Q, P, die gesuchte Form für die excentrische Scheibe dar. Man ersieht aus derselben, daß die, durch den Mittelpunkt A gehenden, Durchmesser ac′, bd′ ꝛc. ꝛc. dieser erhaltenen Kurve einander gleich, und alle so groß wie die Entfernung zwischen P und Q sind.

Die Figur 48 stellt einen Stampfer dar, der durch eine, mit einer rotirenden Welle verbundenen, Kurve (dem Hebedaumen) abc gehoben wird, und der durch sein eigenes Gewicht wieder herabfällt, so wie jene die Hebelatte DE verläßt. In dem Augenblick, wo der Hebedaumen abc die Hebelatte ergreift, legt sich jener an diese mit einer erworbenen Geschwindigkeit an und erzeugt einen heftigen Stoß, der einen nicht unbeträchtlichen Theil von der Leistung der bewegenden Kraft (oder der Arbeit) consumirt; aber dieser Stoß scheint unvermeidlich zu sein, weil der Stampfer während des Niederfallens sich selbst überlassen bleiben muß, um seine Wirkung äussern zu können; ferner ist die Wirkung des Hebedaumens gegen die Hebelatte von der Art, daß der Stampfer während seines Erhebens, seit-

wärts gegen die Scheidelatten und zwar oberhalb der Hebelatte gegen die Linke und unterhalb derselben gegen die Rechte gedrückt wird. Nicht nur die Reibung, welche daraus entsteht, ist beträchtlich, sondern auch der Weg, welchen der Angriffspunkt derselben durchläuft. In Folge dieser beiden Ursachen, des Stoßens und der Reibung, ist dieses System augenscheinlich sehr mangelhaft. Man hat versucht, die Reibung dadurch zum Theil zu beseitigen, daß man die Hebelatte wegnahm, und den Stampfer so anordnete, daß derselbe in den durch seinen Schwerpunkt gehenden Vertikalen durch den Hebedaumen ergriffen und gehoben wurde. Zu diesem Zwecke setzte man ihn aus zwei Theilen E, E (Fig. 49), die zwischen sich einen gewissen Zwischenraum lassen, und durch Bänder und Bolzen mit einander vereinigt sind, zusammen. Zwischen diesen Bändern ist eine, um einen quer durch dieselben gehenden Bolzen sich drehende, Rolle a angebracht, gegen welche der in den gebildeten Zwischenraum eindringende Hebedaumen anstößt und somit sie nebst dem mit ihr verbundenen Stampfer erhebt. Diese Rolle a, die hier die Stelle einer Friktionsrolle vertritt, wird zwar in Folge einer ungleichförmigen Abnutzung zuletzt aufhören, sich zu drehen, allein dies findet im Allgemeinen bei allen Friktionsrollen statt.

Es ist noch zu untersuchen, ob es nicht möglich wäre, den Verlust an Kraft, welcher im Moment des Stoßes entsteht, zu mindern. Nehme man an, die Krümmung der Hebelatte sei so gewählt, daß dieselbe in ihrem Anfangspunkte B (Fig. 50) die Peripherie der rotirenden Welle A tangire, und daß gleichzeitig die Hebelatte im Zustande der Ruhe, ebenfalls in dieser Stelle eine Tangente derselben bilde. Man begreift leicht, daß in diesem Augenblick, wo der Hebedaumen die Hebelatten ergreift, anstatt daß ein Stoß entsteht, nur ein Gleiten statt findet, während Letztere und folglich mit ihr der Stampfer graduell erhoben wird. Weil aber in diesem Falle der Berührungspunkt der Reibungswiderstände einen viel größern Weg durchlaufen muß, so

kann die dadurch absorbirte Quantität der Arbeit (der Kraft) leicht eben so groß oder gleich derjenigen sein, welche der Stoß verzehren würde. Diese Anordnung ist also nur in so fern nützlich, als dadurch in dem System Erschütterungen vermieden werden, welche immer die Dauerhaftigkeit der Maschine beeinträchtigen. Endlich hat man noch den Stampfer, so wie einen Theil der Peripherie der rotirenden Welle (Fig. 51) mit Zähnen versehen; der Stampfer erhebt sich so lange, als der Eingriff der Zähne stattfindet, und fällt wieder herab, sobald der ungezähnte Theil der Welle dem Stampfer zugewendet ist, und diese wechselseitige Bewegung dauert so lange, als die Welle sich in Bewegung befindet. Es ist aber leicht zu sehen, daß die Zähne nicht hinreichende Stärke besitzen, um andauernd dem Stoß widerstehen zu können, und daß dieses System noch mangelhafter ist, als dasjenige mit Hebedaumen und Hebelatten.

Wir werden die in dem oben angeführten, von Lanz und Bétancourt herausgegebenen Werk beschriebene Vorrichtung, wo ein seitwärts an einer, mit einer rotirenden Welle verbundenen Platte, hervorragender Zapfen in einem hinreichend langen horizontalen Falze gleitet, der mit einem zwischen Scheidelatten beweglichen Pfosten verbunden ist, und diesem dadurch eine geradlinige wechselseitige Bewegung mittheilt, nicht speciell betrachten, weil dieselbe einen sehr großen Aufwand an bewegender Kraft erfordert und somit unter die höchst Mangelhaften gehört. Ebenso werden wir uns in Betreff einer andern Verbindung ganz kurz fassen, die aus zwei gezähnten Rädern besteht, deren Durchmesser sich wie 1 zu 2 verhalten und die so miteinander verbunden sind, daß das Kleinere in dem Größern herumrollt, und in Folge dieser Bewegung jeder Punkt in dem Grundkreise des Kleinern eine durch den Mittelpunkt des Größern gehende Gerade beschreibt. Diese Verbindung ist auf folgende Weise zusammengesetzt.

Eine rotirende Welle **A** (Fig. 52), deren Axe mit derjenigen des großen Rades **C** zusammenfällt, trägt an ihrem Ende eine Kurbel **M**, und um die Warze **B** derselben dreht sich das kleinere Rad **D**. Das große Rad **C** ist an zwei Trägern **pp** so befestigt, daß dasselbe auf keinerlei Weise seine ihm gegebene Lage verändern kann, und der Halbmesser desselben ist dem Durchmesser des kleineren Rades **D** gleich *).

Wenn nun die Welle **A** rotirt, so dreht sich das Rad **D** nicht nur um die Axe **B**, sondern da diese sich gleichzeitig im Kreise herumbewegt, so rollt es in Folge des Eingriffes mit dem Rade **C** in diesem herum; wird nun in einem Punkte **E** seines Grundkreises eine Axe befestiget, mit welcher eine Stange verbunden ist, so wird diese während der Dauer der Bewegung der Welle in einer durch **A** gehenden geraden Linie verbleiben, und in dieser Richtung eine wechselseitige Bewegung annehmen, deren Weg dem Durchmesser des Rades **C** gleich ist. Um zu beweisen, daß der Punkt **F** (Fig. 53) des in dem Kreise **lok** herumrollenden Rades **AFO** — wenn dessen Durchmesser dem Halbmesser von jenem gleich ist — in der geraden Linie **ik** verbleibt, hat man:

$$\text{Winkel } FAO = \text{Winkel } IAO$$

Ausserdem ist:

$$\text{der Winkel } IAO = \frac{\text{Bogen } IO}{AI}$$

$$\text{und Winkel } FAO = \frac{\frac{1}{2}\,\text{Bogen } FO}{FO} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{Bogen } FO}{\frac{1}{2}\,AI}$$

$$= \frac{\text{Bogen } FO}{AI}.$$

Daher ist: Bogen **FO** = Bogen **IO**.

und diese Bedingung ist erfüllt, weil der kleine Kreis, indem er innerhalb des großen rollt, vom Ausgangspunkte der

*) Unter den Halbmessern oder Durchmessern des Rades sind hier die Grundkreise derselben verstanden.

Bewegung an gerechnet, einen Bogen **FO** abwickelt, der dem Bogen **IO** gleich ist.

Indessen hat diese Vorrichtung, wegen der sehr starken ungleichförmigen Pressungen, denen die Zähne der Räder derselben ausgesetzt sind, und wodurch ihr Bruch leicht herbeigeführt werden kann, bedeutende Nachtheile, die ihre Anwendung beschränken*).

---

*) Diese Verbindung, welche ausserdem noch unter dem Namen Hypocycloidenrad bekannt ist, ist allerdings nicht für Maschinen geeignet, an welchen eine sehr intensive Kraft unmittelbar an der Stelle wirksam ist, wo die Umwandlung der Bewegung statt finden soll; indem der Druck auf die Zähne nicht gleichförmig ist und in der einen Hälfte des festen Rades, gegen die rechtsliegenden, in der andern Hälfte desselben gegen die linksliegenden Seitenflächen der Zähne des kleinen Rades statt findet, wodurch bei einem fortwährend starken Druck durch die Abnutzung bald ein schädlicher Spielraum entsteht, der bei jedem Wechsel nachtheilige Stöße und zuletzt den Bruch der Zähne veranlaßt.

Eine bei den, von König und Baur erfundenen, Schnelldruckpressen, mit Erfolg angewendete Verbindung, wodurch eine kreisförmige Bewegung in eine geradlinige Wechselseitige umgewandelt wird, verdient hier noch Erwähnung. Eine Stange AB (Fig. 54) ist in gerader Linie mit gleichweit von einander abstehenden cylindrischen Stäben a, b, m (sogenannten Treibstäben) besetzt, in welche ein Zahnrad D eingreift, und sie in der Richtung des Pfeils vorwärts schiebt; damit nun dasselbe Rad, ohne seine rotirende Bewegung zu ändern, diese Stange wieder rückwärts schiebt, muß es in dem Moment, wo der letzte Treibstock m sich vertikal unter der Axe C befindet, unter die Stange herabsteigen, was dadurch bezweckt wird, daß der Zapfen c in einer halbkreisförmigen Führung pqs sich zu bewegen gezwungen wird, ohne jedoch aus der vertikalen Richtung herauszutreten; in dem Augenblick, wo sich das Rad in der (Fig. 55) angedeuteten Lage be-

26. Umwandlung der continuirlichen kreisförmigen Bewegung in eine ähnliche Wechselseitige oder Schwingende. Das erste Mittel, um eine continuirliche kreisförmige Bewegung in eine ähnliche Wechselseitige umzuwandeln, hat viel Aehnlichkeit mit derjenigen, mittelst welcher Stampfer gehoben werden. Es besteht in einem Rade, das auf seiner Peripherie mit Hebedaumen besetzt ist, die, Einer nach dem Andern, gegen das Ende eines um einen festen Punkt beweglichen Hebels so lange drücken, bis sie in Folge der fortdauernden Bewegung der Welle wieder abgleiten; worauf jener entweder durch die Wirkung seines eigenen Gewichtes oder auf irgend eine andere Weise, in der bis zum Angriffe des folgenden Hebedaumens verflossenen Zeit seine ursprüngliche Lage wieder einnimmt. Gewöhnlich ist der Hebel, wovon wir so eben sprachen, der Stiel (Helm) eines Hammers *) (Fig. 57). Der Schwanz des Helms, woran der Hammer befestigt ist, wird durch den Hebedaumen von oben nach unten gegen einen Theil m,

---

findet, beginnt es die Stange AB rückwärts zu bewegen, und zwar so lange, bis der Treibstock a sich vertikal über der Axe C befindet, worauf das Rad D auf ähnliche Weise, wie so eben erklärt wurde, mittelst der Führung vwz wieder hinauf steigt, und wenn sich die Axe C vertikal über dem Treibstabe a befindet, die Stange AB wieder vorwärts schiebt u. s. f. Man ersieht aus dem Spiel dieser Verbindung, daß das Rad D mit seinen Zapfen C sich in einer vertikalen Ebene abwechselnd auf- und abwärts bewegen muß, und deswegen das andere Ende F der Welle (Fig. 56) mit der horizontal liegenden Welle G, welche die rotirende Bewegung überträgt, durch ein allgemeines Gelenke H verbunden ist.

*) Das Holzstück, an dessen einem Ende der Hammer in Hammerwerken befestigt ist, führt in der technischen Sprache den Namen: Helm, Hammerhelm. Wenn die Drehaxe des Hammers sich zwischen dem einen Ende des Helms und sei-

welchen man den Preller nennt, gestoßen; in diesem Falle befindet sich der Angriffspunkt T des Hebedaumens und der Kopf M des Hammers dies- und jenseits der Drehungsaxe A; oder der Hebedäumen erhebt den Hammer unmittelbar an dem Kopfe, dieß ist der Fall bei dem Stirnhammer (Fig. 58); oder der Hammer wird zwischen seiner Drehaxe und dem Kopfe durch den Hebedaumen ergriffen (Fig. 59). Im letzteren Falle kann man, um den Stoß der Hebedaumen gegen den Hammerhelm zu vermeiden, eine ähnliche Vorrichtung, wie bei den Stampfern erwähnt wurde, anwenden. Man zieht nämlich durch die Axe A eine Gerade AC fast tangentiel zu der rotirenden Welle, und construirt die Contur eines Hebedaumens, welcher gleichzeitig die Peripherie der Welle, und die mit AC parallel gezogene Gerade tangirt. Dieser Anordnung zur Bewegung der Hämmer bediente man sich zuerst in dem Cockerill'schen Etablissement zu Seraing bei Lüttich. Unter allen Systemen, mittelst denen die Umwandlung der continuirlichen kreisförmigen Bewegung in eine ähnliche Wechselseitige veranstaltet werden kann, ist ohne Widerrede dasjenige das Vollkommenste, wo eine, mit einer rotirenden Welle verbundene, Kurbel (Krummzapfen) M (Fig. 60.) die Bewegung vermittelst einer Leitstange (Kurbelstange) B auf einen um die Axe O beweglichen Balancier CD überträgt. Dieser wird gewöhnlich bei den Dampfmaschinen angewendet und besteht aus einem ohngefähr zwei Zoll dicken, seitwärts durch Rippen verstärkten gußeisernen Theil. Sein Zweck ist: die geradlinige wechselseitige Bewegung der Kolbenstange G über-

---

nem Kopfe befindet, also derselbe durch die Hebedaumen der Welle an dem einem Ende angegriffen wird, so nennt man ihn einen Schwanzhammer; befindet sich hingegen die Drehaxe am Ende des Helms, und der Hammer wird durch die Hebedaumen am Kopfe, oder zwischen diesen und der Drehaxe ergriffen, so heißt er ein Aufwurfhammer (oder kürzer, Aufwerfer).

zutragen. Wir werden bald sehen, wie mittelst der Disposition des Parallelogramms abcd dieselbe erreicht wird. Der aus der Leitstange, der Kurbel und dem Balancier bestehende Apparat ist im Grunde nur eine Nachahmung der Scheerschleifen und der Spinnräder.

Watt hatte für die Umwandlung dieser Bewegung zuerst das Planetenrad erdacht. Obgleich dieses Mittel in Betracht der geringen Solidität, die es besitzt, und der enormen Reibung, mit welcher die Bewegung derselben begleitet ist, seitdem gänzlich aufgegeben wurde, so wollen wir doch nicht unterlassen, eine kurz gefaßte Beschreibung davon zu geben.

AB (Fig. 61) ist ein Balancier, der eine schwingende Bewegung um die Axe C besitzt; cd ist eine Stange, welche sich frei um c dreht und deren Ende d in eine Klaue endigt, die mittelst dreier Bolzen mit dem Centrum eines gezähnten Rades E fest verbunden ist. Dieses greift in ein mit der Welle des Schwungrades N fest vereinigtes gezähntes Rad F von demselben Halbmesser ein, und damit beide unveränderlich im Eingriffe verbleiben, sind die Mittelpunkte oder vielmehr die Axen e und f durch einen Zügel ef mit einander verbunden. Die continuirliche kreisförmige Bewegung des Schwungrades verursacht, daß das Rad E um dasjenige F herumläuft, folglich die damit vereinigte Stange auf- und niedersteigt, und auf den Balancier AB eine wechselseitige Kreisbewegung überträgt. In sofern die beiden Räder E und F gleiche Halbmesser haben, ist es leicht zu folgern, daß ein vollständiger Wechsel des Balanciers mit zwei Umgängen des Schwungrades correspondirt. Denn ein vollständiger Wechsel des Balanciers hat stattgefunden, wenn das Centrum e des Rades E einen ganzen Umgang um den Mittelpunkt f des Schwungrades vollbracht hat. Nennt man also ψ die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich das Centrum e um f bewegt, und R den Halbmesser jedes der beiden gezähnten Räder, so ist $2R\psi$ der in einer Zeitsekunde durchlaufene Weg durch das Centrum des Rades E. Weil aber dasselbe un-

veränderlich fest mit der Stange **cd** vereinigt ist, so werden die gleichzeitig durch andere Punkte dieses Rades durchlaufenen Wege demjenigen, den das Centrum desselben durchläuft, gleich seyn; folglich ist $2R\psi$ auch der durchlaufene Weg des Rades **E** in der Stelle, wo es in Berührung mit dem Rade **F** ist. Ist nun dessen Winkelgeschwindigkeit ψ', so ist der in einer Sekunde durchlaufene Weg in der Stelle, wo es in Berührung mit dem Rade **E** ist, durch $R\psi'$ ausgedrückt, daher hat man:

$$R\psi' = 2R\psi$$

und folglich:

$$\psi' = 2\psi$$

Dieß zeigt uns, daß die Zahl der Umdrehungen des Schwungrades doppelt so groß, als die Zahl der in derselben Zeit stattgefundenen vollständigen Wechsel der Stange oder des damit verbundenen Balanciers sind.

Der Hebel mit der Sperrklinke (Geisfuß), welcher auf ein Sperrrad einwirkt, wandelt die wechselseitige kreisförmige Bewegung in eine continuirliche Kreisförmige um. Denn wenn eine Gabel **A** (Fig. 62) in die hakenförmigen Zähne eines eisernen Rades **B** eingreift, und abwechselnd vor- und rückwärts geschoben wird, so nimmt dieses Rad eine kreisförmige Bewegung um seine Axe an, die zwar, streng genommen, nicht continuirlich ist, indem das Rad abwechselnd in Ruhe und in Bewegung versetzt wird, die aber, wenn man diese geringen, gleichförmig erfolgenden Unterbrechungen nicht beachtet, als eine Solche betrachtet werden kann. Die Sperrklinke **DA** (deren Ende die eben erwähnte Gabel ist), ist mit dem einen Arme **CD** eines Winkelhebels **DCE** durch einen Bolzen oder Stift verbunden; wenn daher die Kraft **P** an dem andern Arme **E** desselben von oben nach unten wirkt, so schiebt jene einen oder mehrere Zähne des Rades **B** vorwärts, wenn hingegen diese Kraft den Hebelarm **CE** von unten nach oben bewegt, so wird die Sperrklinke zurückgezogen, und da dieselbe in dieser Richtung wegen der Form der Zähne keine Wirkung auf diese

ausüben kann, so bleibt während dieser Bewegung das Rad in Ruhe. Eine Klinke **F** verhindert in dem Falle, wenn das Rad zum Erheben einer Last **Q** bestimmt ist, das Zurückweichen oder Rückwärtsbewegen derselben.

Zuweilen ist diese Vorrichtung so angeordnet, daß ein Hebel **AB** statt mit einer, mit zwei Sperrklinken verbunden wird (Fig. 63). Jener hat dann ebenfalls eine wechselseitige Kreisbewegung um seine Axe **C** und diese um die in ihm angebrachten Zapfen **D** und **E**. Die beiden Sperrklinken greifen in die hakenförmigen Zähne des Rades **H** ein, und durch ihr abwechselndes Vor- und Rückwärtsschieben drehen sie dieses um seine Axe. Denn wenn der Punkt **B** abwärts bewegt wird, so wird die Sperrklinke **DE** erhoben, und dreht das Rad, während die Andere **FG** niedersteigt und mit ihrem Haken **G** in die Vertiefung eines der vorhergehenden Zähne hinüber tritt. Wird hingegen der Punkt **B** erhoben, so wirkt in der bezeichneten Weise die Sperrklinke **FG** auf das Rad, und die Erstere **DE** tritt mit ihrem Haken zurück. Das Sperrrad **H** hat hier ebenfalls keine continuirliche Bewegung, weil die Wirkung auf derselben abwechselnd nachläßt und wieder beginnt, und daher durch eine Folge von Stößen statt findet; daher ist dieses System in dem Falle als ein fehlerhaftes zu betrachten, wenn damit eine bedeutende Arbeit (eine kräftige Wirkung) ausgeübt werden soll. Jedoch wenn das Sperrrad sich nur langsam bewegt, und nicht den nützlichen Effekt überzutragen hat, dann ist seine Arbeit, so wie der daraus entstehende Verlust sehr gering. In diesem Sinne betrachtet, rechtfertigt sich dessen Anwendung in den Sägemühlen, wo mittelst eines so angeordneten Sperrrades der Blockwagen dem Sägegatter entgegen geschoben wird. Aber zur Bewegung der Schraubenspindeln in den Schraubenpressen ist eine solche Vorrichtung nicht geeignet, weil die während der Bewegung auf einander folgenden Erschütterungen die daran arbeitenden Personen ermüden würden.

27. Umwandlung der wechselseitigen Kreisbewegung in geradlinige Wechselseitige. — Das erste Beispiel, welches uns die Umwandlung der wechselseitigen Kreisbewegung in geradlinige Wechselseitige darbietet, ist ein Balancier mit Sektoren (Fig. 64), welcher sich bald in dem einen bald im entgegengesetzten Sinne um seine Axe **O** dreht, und der mittelst Ketten auf die in § 22 angezeigte Weise mit den Kolbenstangen m und n verbunden ist. Die dadurch entstehende Wirkung ist: daß die eine Kolbenstange in die Höhe steigt, wenn die andere nieder geht. Diese Vorrichtung wurde früher hauptsächlich bei Dampfmaschinen, die zum Schöpfen des Wassers bestimmt sind, angewendet, und ist zu diesem Zwecke zum Theil noch im Gebrauch. Man hat aber dieselbe mit Vortheil durch eine Andere ersetzt, die man dem berühmten englischen Mechaniker Watt verdankt. Derselbe war der erste, der die Dampfmaschinen umgestaltete, verbesserte und ihre wechselseitige Bewegung in eine continuirliche Kreisförmige umwandelte, so daß sie von jenem Zeitpunkte an für industrielle Zwecke verwendet werden konnten.

Die Fig. 65 stellt den Balancier **AE** der gegenwärtig gebräuchlichen Dampfmaschine dar, welcher eine wechselseitige Kreisbewegung um seine Axe **O** durch die mit dem Kolben **G** verbundene Stange **BC** und durch die abwechselnde Wirkung der Dämpfe gegen die obere oder untere Kolbenfläche erhält. Wenn der obere Punkt **B** der Stange **BG** mit dem Ende **A** des Balanciers, mittelst eines Zapfens oder eines Gelenkes verbunden wäre, so könnte jene während der Bewegung nicht in einer Vertikalen verbleiben, weil der Punkt **A** sich in einem Kreisbogen um **O**, dagegen der Kolben in einer geraden Linie bewegt, und folglich die Stange gezwungen wäre, abwechselnd diesen beiden von einander verschiedenen, mit Seitendrückungen begleiteten Bewegungen nachzugeben, in so fern man dieselbe nicht durch ein anderes Gelenke in **G** mit der oberen Fläche des Kolbens verbände; dieses findet nun wohl bei einigen Maschinen

statt, aber die Wirkung des Theils BG gegen den Kolben zerlegt sich, und dieser wird an einer Seite mehr als an der andern gegen die Wand des Cylinders m n gepreßt, was an der Seite, wo die Pressung geringer ist, ein Entweichen der Dämpfe zur Folge hat. Watt hat daher das Gelenke B der Stange BG mit einer der Ecken des in seinen Verbindungspunkten beweglichen Parallelogramms AB CD oder vielmehr mit dem Quertheil verbunden, welcher die Ecken zweier paralleler und gleicher Parallelogramme, die auf beiden Seiten des Balanciers angebracht sind, vereinigt. Die Ecken A und B dieser Parallelogramme — welche wir von hier an so, als ob sie zusammen nur ein Einzelnes bildeten, betrachten werden, — befinden sich in der geraden Linie v w, die den Balancier in zwei symmetrische Hälften theilt, und die Ecke C ist mit einer oder vielmehr mit zwei Stangen FC, die man die Zügel (Gegenlenker) des Parallelogramms nennt, und die sich um das feste Centrum F drehen, in der Art verbunden, daß der Punkt B während der Bewegung ohne merkbare Abweichung in ein und derselben Vertikalen verbleibt.

Folgendermaßen hat man zu verfahren, um die Lage von dem Punkte F zu bestimmen, wenn die Dimensionen des Parallelogramms, der Kolbenstange und des Balanciers gegeben sind.

A′O A″O (Fig. 66) seien die beiden entgegengesetzten Lagen des Balanciers; AO hingegen seine mittlere oder horizontale Lage und B, G die Richtung der Kolbenstange. Man construirt die drei Parallelogramme A′ B′ C′ D′, A″ B″ C″D″ und ABCD in der Weise, daß die Ecken B″, B′ und B derselben in der Vertikalen B′G liegen, und die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Seiten einander gleich sind. Dadurch erhält man drei verschiedene Lagen C′ C″ und C von dem Ende des Gegenlenkers FC, und wenn man durch diese drei Punkte einen Kreis legt, und davon den Mittelpunkt F bestimmt, so ist dies der Punkt, um welchen sich jener drehen muß. Diese Auflösung der Auf-

gabe ist nicht ganz genau; denn wenn eine große Unzahl solcher Parallelogramme für die verschiedenen Lagen des Balanciers zwischen A'O und A''O in der Art construirt werden, daß alle diese Ecken B auf derselben Vertikalen B'G sind, so findet man, daß die Ecken C ꝛc nicht in einem wirklichen Kreisbogen liegen; daraus folgt dann umgekehrt, daß, wenn man die Ecken C zwingt, einen Kreisbogen, wovon F der Mittelpunkt ist, zu durchlaufen, die Ecken B ꝛc nicht beständig auf der Vertikalen B' G bleiben. Man kann jedoch die Dimension der Theile so wählen, daß die Abweichungen des Punktes B von der Vertikalen sehr klein werden, und eine oder zwei Linien nicht überschreiten.

Um die Größe dieser Abweichung zu erhalten, construirt man die verschiedenen Lagen der Parallelogramme in der Art, daß die Ecken C ꝛc derselben alle mit dem Kreisbogen C' C C'' zusammenfallen. Die verschiedenen Lagen der Endpunkte B ꝛc, durch eine Kurve verbunden, geben dann die Grenze der gesuchten Abweichung an. Man wird finden, daß diese Kurve die Form eines S (Fig. 67) hat, welche die Vertikale B'G in B schneidet, und sich von dieser Linie zwischen den beiden Grenzen B' und B'' um die Größen cb, b'c' symmetrisch entfernt und wieder nähert. Das Maaß dieser Abweichung erhält man durch Construction leicht, wenn man diese in natürlicher Größe, oder in noch größeren Verhältnißen ausführt und dabei mit möglichster Schärfe verfährt.

Es giebt einige Regeln, die berücksichtigt werden müssen, damit die Abweichung so klein wie möglich werde; die[illegible]nd:

I. Die Richtung der Vertikalen B'G (Fi[illegible]er die Axe der Stange muß die Distanz A[illegible] zwis[illegible] Bogen A'AA'', welchen das Ende A des Balanciers beschreibt, und der Sehne A'A'' in zwei gleiche Theile theilen.

II. Die Sehne A'A'' welche beinahe dem durchlaufenen Weg des Kolbens (dem Kolbenhub) gleich ist, soll nicht

größer als die halbe Länge AO des Balanciers, oder höchstens Zweidrittel desselben sein.

III. Die Länge der Seiten AB oder DC (Fig. 66) des Parallelogramms wird man so wählen, daß sich das Ende B der Stange B′G auf der durch den Mittelpunkt des Balanciers gehenden Horizontalen befindet, wenn dessen Endpunkt A′ die höchste Lage einnimmt.

IV. Die Horizontale OB′ muß den, durch den Balancier beschriebenen, Winkel in zwei gleiche Hälften theilen.

V. Die Längen der Seiten A′D′ und B′C′ können willkührlich genommen werden, oder vielmehr sie hängen von der Distanz, in welcher man das Centrum F placiren will, oder von der Länge des Gegenlenkers FC′ ab; denn jemehr sich C′D′ dem Mittelpunkte O′ des Balanciers annähert, desto kleiner wird der durch den Punkt C′ beschriebene Bogen, und folglich desto kleiner der Gegenlenker FC sein*).

---

*) Wenn die Dimensionen des Watt'schen Parallelogramms einigermassen bedeutend sind, so ist es unbequem, die Größe des Gegenlenkers durch Construction zu bestimmen, und in diesem Falle hat die Rechnung einen entschiedenen Vorzug, da dieselbe augenblicklich und ganz genau die Dimension desselben mittelst eines aus der Betrachtung der gegenseitigen Lage der Theile abgeleiteten Ausdrucks angiebt. Um diesen zu erhalten, seien a′d′c′, adc und a″d″c″ (Fig. 69) die drei verschiedenen Lagen des Parallelogramms, für den höchsten, mittlern und niedrigsten Stand des Balanciers aO, [illegible] die Horizontale, in welcher die Axe O des Ba-[illegible]ers, und pq die damit Parallele, in welcher der Drehpunkt O″ des Gegenlenkers liegt. Verlängert man die Richtungen d′c′ und d″c″ der untern Längenschienen, so schneiden sich diese in O′, und die Gerade OO′ ist mit a′d′ und a″d″ parallel; daher d′O′ = a′O = d″O′ = a″O und c′ c c″ der Bogen, welchen der Gegenlenker abwechselnd beschreibt. Bezeichnet:

Zuweilen will man gleichzeitig zwei Stangen B′G und b′g (Fig. 71) mit demselben Balancier vertikal auf- und abwärts bewegen; zu diesem Zwecke bildet man ein in-

---

R den Hebelarm des Balanciers
a die Größe einer Längenschiene des Parallelogramms
b . . . . . . Hängeschiene desselben
h die Höhe des Hubes und
r die Länge des Gegenlenkers,
so ist:
$a'O = d'O' = R$; $d'c' = pc = d''c'' = a$; $a'd' = ap = a''d'' = b$; $a'a'' = d'd'' = h$; $o''c = r$ und $c'c''$ die Sehne des Bogens, welchen der Endpunkt c des Gegenlenkers durchläuft. Um die gegenseitigen Beziehungen dieser Linien besser übersehen zu können, sind sie in Fig. 70 von den übrigen Hülfslinien getrennt dargestellt.

Nach einem bekannten Lehrsatze des Kreises ist die Sehne

$$c'c = \sqrt{2r \times qc}$$

also
$$2r \times qc = (c'c)^2$$

und hieraus
$$r = \frac{(c'c)^2}{2 \cdot qc} \qquad (\alpha)$$

diese beiden Größen c′c und qc kann man nun durch die Gegebenen auf folgende Weise ausdrücken; es ist:

$$d'p = \frac{h}{2}; \; pO' = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2}$$

zieht man Kc′ parallel mit pq und setzt $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2} = U$ so ist in dem Dreiecke d′pO′

$$KC' : pO' = d'C' : d'O'$$

oder
$$KC' : U = a : R$$

hieraus
$$KC = \frac{aU}{R}$$

ferner ist in demselben Dreiecke

$$c'q : d'p = O'c' : O'd'$$

neres Parallelogramm $a'b'c'D'$, welches zwei Seiten $c'D'$ und $a'D'$ mit dem Großen gemein hat, und deren Ecke b', die als Aufhängepunkt der zweiten Stange dient, sich auf der

---

oder $$o'q : \frac{h}{2} = R - a : R$$

hieraus $$c'q = \frac{h(R - a)}{2R}$$

Nun ist $$Kc' = pq$$

also $$qc = pc - pq = a - \frac{aU}{R} = \frac{a(R - U)}{R}$$

folglich die Sehne $o'c = \sqrt{(cq)^2 + (qc)^2}$

oder $$(c'c)^2 = (c'q)^2 + (qc)^2 = \frac{h^2 (R - a)^2}{4R^2} + \frac{a^2 (R - U)^2}{R^2}$$

substituirt man diese für $(c'c)^2$ und qc gefundenen Werthe in (α), so erhält man:

$$r = \frac{\frac{h^2 (R - a)^2}{4R^2} + \frac{a^2 (R - U)^2}{R^2}}{\frac{2a (R - U)}{R}}$$

oder nach gehöriger Reduction

$$r = a + \frac{h^2 (R - 2a)}{8a (R - U)} \qquad (\beta)$$

die Richtung der Vertikalen vw halbirt die Linie az (Fig. 69);
da nun

$$zO = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \text{ und } aO = R,$$

[illegible] ist, wenn man au mit d bezeichnet

$$d = \frac{az}{2} = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2}\right)$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes kann man nun die Entfernung up beider Parallelen mn und pq, in welchen die Drehpunkte O und o des Balanciers und des Gegenlenkers liegen, bestimmen; denn es ist:

Geraden oB befindet, welche den Mittelpunkt des Balanciers mit dem Aufhängepunkt B′ der ersten Stange verbindet. Denn die Linien B′o und b′o haben ein unveränderliches Verhältniß zu einander, deswegen wird der Punkt b′ eine Gerade beschreiben, wenn derjenige B′ ebenfalls eine Solche beschreibt, und für beide Fälle bleibt die Größe des Gegenlenkers dieselbe. Man kann sogar noch eine dritte Stange an dem Durchschnittspunkt b″, der Geraden B′O mit der Seite C′D′, aufhängen, welche sich ebenfalls mit ihrem Aufhängepunkte in einer Vertikalen bewegen wird.

Die Fig. ~~70~~ 72 giebt die Disposition eines umgekehrten Parallelogramms. A′O ist der Balancier, und A′B′, C′D die Seiten des Parallelogramms, welche hier sehr lang sind; dagegen ist die Kolbenstange sehr kurz und in einer ziemlichen Höhe über dem Balancier placirt.

Man kann die Construction des Parallelogramms noch mehr vereinfachen, wenn man die Seiten AD, DB und BC (Fig. 71) wegläßt, und sich nur auf die Einzige AC, welche in C mit der Leitstange FC verbunden ist, beschränkt; der Befestigungspunkt der Stange bg, welcher sich in vertikaler Richtung bewegen soll, ist auf der beibehaltenen Seite AC in b, wo die von der Ecke B des angenommenen Parallelo-

---

$$up = \sqrt{(ap)^2 - (au)^2} = \sqrt{b^2 - d^2}$$

und die Entfernung o″p des Drehpunktes (des Gegenlenkers) von der Vertikalen (der Hublinie) vw nämlich:

$$o''p = ra.$$

Wenn die Längenschienen a′b′ des Parallelogramms der halben Länge (des Hebelarms) des Balanciers gleich genommen werden, so ist dann nach (β) $r = a = \frac{R}{2},$

und diese Anordnung des Watt'schen Parallelogramms ist eine der Gewöhnlichsten und der Bequemsten, die in all den Fällen zu empfehlen ist, wo nicht anderweitige Umstände eine Abweichung davon nothwendig machen.

gramms, nach dem Mittelpunkte O des Balanciers gezogene Gerade BO dieselbe durchschneidet. Die Construction, um die Lage des festen Drehpunktes für den Gegenlenker zu erhalten, ist äußerst leicht. Ist nämlich b′g (Fig. 74) die gegebene Vertikale, so ziehe man durch die Punkte A′A″ und A des Balanciers, wenn sich dieser in der höchsten, tiefsten und mittleren (horizontalen) Lage befindet, gerade Linien so, daß für diese drei verschiedenen Lagen der Befestigungspunkt der Stange bg (Fig. 73) sich in b′,b″ und b (Fig. 74) auf der Vertikalen b′g befindet; macht man hierauf die Verlängerungen b′c′, b″c″ und bc dieser Linien so groß, wie bc (Fig. 73) und legt durch die Endpunkte c′, c″ und c derselben einen Kreisbogen, so ist dessen Mittelpunkt F der Drehpunkt für den Gegenlenker cF.

Es giebt noch andere Vorrichtungen für denselben Zweck, wo die Axe des Balanciers beweglich ist. Obgleich dieselben keine besonderen Vortheile vor dem Watt'schen Parallelogramm voraus haben und auch selten angewendet werden, so wollen wir dennoch eine kurz gefaßte Beschreibung davon geben.

Eine starke Stange oder Säule trägt an dem obern Ende die Axe O (Fig. 75), um welche der Balancier BO schwingt, und ihr unteres Ende ist um eine zweite Axe A beweglich. Zwei mit dem Balancier verbundene Lenkstangen (beide sind hier durch die Linie FC dargestellt) bewegen sich um Axen, deren Lage durch den Punkt F bezeichnet ist, und welcher der Durchschnittspunkt der durch die Axe O des Balanciers gehenden Horizontalen mit der, durch die höchsten und tiefsten Lagen der Endpunkte B ꝛc desselben gezogenen Vertikalen ist. Hiebei wird vorausgesetzt, daß der Balancier in seinen beiden äußersten Lagen symmetrisch zu der Horizontalen liegt, d. h. die beiden Winkel BOF und FOB′ einander gleich sind, und die Linie BG die Richtung der Kolbenstange darstellt. Um den Punkt A, um welchen der Axenträger AI hin- und herschwingt, zu finden, trägt man FC + CO = BO (weil BC = FC) auf

der Horizontalen von **F** gegen **I**; legt man hierauf durch die Punkte **I** und **O** einen Kreisbogen, dessen Halbmesser so groß wie möglich angenommen wird, so ist der Mittelpunkt desselben der Drehpunkt **A**. Denn bei näherer Betrachtung dieser Construction wird man wahrnehmen, daß der Verbindungspunkt **B** der Kolbenstange mit dem Balancier, welcher drei Punkte mit der Vertikalen v w gemein hat, sich von dieser um so weniger entfernen wird, je kleiner **OI** in Vergleichung mit dem Halbmesser **OA** ist. Je weniger daher die Bewegung des Endpunktes **B** der Stange **BG** von der Vertikalen abweichen soll, desto größer muß der Halbmesser **AI** sein. Wenn man beschränkt ist, dem Axenträger **AO** eine angemessene Höhe geben zu können, so wird man den Drehpunkt **O** des Balanciers von **F** mehr entfernen, damit der von diesem beschriebene Winkel **BOB′** und folglich auch **OI** kleiner werde *).

---

*) Eine mit dieser so eben erläuterten Combination ziemlich verwandte Art hat auch von Reichenbach angegeben, die mit Erfolg bei kleinen Maschinen, an denen nur eine mäßige Kraft in Thätigkeit ist, angewendet werden kann.

Ein genau gearbeiteter cylindrischer Stab AB (Fig. 76) kann sich in einer Hülse CD, die um die Axe O beweglich ist, hin- und herschieben; das Ende A ist mit einem Lenkstab AF verbunden, dessen Größe so gewählt ist, daß, wenn der Endpunkt A des Stabes einen Kreisbogen, dessen Halbmesser AF ist, beschreibt, der andere Endpunkt B nahe in einer Vertikalen B G verbleibt. Hieraus ersieht man, daß sich der Stab in der Hülse während der Bewegung verschiebt.

Um die Lage für den Drehpunkt E des Lenkstabes AF zu erhalten, zieht man die Horizontale mn und zu dieser die Vertikale B G, trägt von B nach B′ und B″ die halbe Hubhöhe und nach A die Länge des Stabes und nimmt den Punkt O auf BA beliebig an. Nun verbindet man O mit B′ und B″, verlängert diese Linien rückwärts, macht B′A′ = B″A″ = BA und legt durch die drei Punkte A′ A A″ einen Kreisbogen

(Fig. 77)

Wir beschließen die Betrachtung der Umwandlung der wechselseitigen Kreisbewegung in eine geradlinige Wechselseitige durch die Beschreibung einer sehr einfachen Vorrichtung, die mit Vortheil bei Handpumpen und ähnlichen Maschinen angewendet werden kann. Dieselbe besteht aus einem um die Axe O beweglichen Hebel BD (Fig. 78), dessen Ende B durch eine daselbst applicirte Kraft eine wechselseitige Kreisbewegung erhält, während das andere Ende in den durchbrochenen Theil orpq einer Stange LM eintritt und mit dieser durch ein um die beiden Bolzen rs und vw bewegliches Gelenke F verbunden ist. Die Stange LM ist von N bis L cylindrisch geformt, und gleitet mit diesem Theil in den festen Kloben m; unterhalb ist sie mit dem Pumpenkolben verbunden, und somit kann sie sich nur in vertikaler Richtung auf und nieder bewegen. Diese Vorrichtung ist allgemein bei den Pumpen der hydraulischen Pressen angewendet.

28. Umwandlung der kreisförmigen oder der geradlinigen wechselseitigen Bewegung in eine Aehnliche. — Es wird vielleicht unnütz sein, die Umwandlungen der so eben genannten Bewegungen hier aufzuführen, weil die Mittel, wodurch dieselben erreicht werden, schon unter den, im 25ten und 26ten Paragraphen dieser Abtheilung Aufgezählten enthalten sind. Indessen giebt es eine geringe Zahl von Hilfsmitteln, wodurch diese Umwandlungen directe ausgeführt werden, z. B. bei dem Drehstuhl mit der Federstange, wo der Fußtritt CD (Fig. 79) eine wechselseitige Kreisbewegung auf die Spindel k mittelst der um dieselbe geschlungenen, und mit der Federstange aB verbundenen Schnur abc überträgt. Die geradlinige wechselseitige Bewegung wird durch die be-

---

so ist dessen Mittelpunkt F der gesuchte Drehpunkt. M ist die Warze und BM die Lenkstange der Kurbel MN, deren kreisförmige Bewegung durch diese Vorrichtung in eine geradlinige Wechselseitige umgewandelt wird.

kannten sogenannten Schellenzüge directe übertragen, die aus mehreren durch Dräthe oder Schnüre mit einander verbundenen Winkelhebeln (Fig. 80) bestehen, und mit denen die Bewegung wie mit den Rollen in jeder beliebigen Richtung fortgeleitet werden kann. Endlich wird noch dieselbe Bewegung durch Schwengel (Fig. 81), die mittelst Leitstangen mit einander verbunden sind, übertragen, wie dies bei der alten Maschine zu Marly der Fall war. Aber diese Verbindungen erzeugen eine ausserordentliche Reibung, und ein rasches Abnützen der Bolzen und Zapfen. Der Spielraum derselben vermehrt sich dadurch, und in Folge desselben finden nun fortwährend Stöße statt, die nach und nach alle Theile der Maschine verstauchen. Aus diesem Grunde und um nicht ähnlichen Begegnissen ausgesetzt zu sein, vermeiden es die Engländer, die wechselseitige Bewegung directe überzutragen; sie ziehen es vor, die erstere wechselseitige Bewegung in eine continuirliche Kreisförmige und hierauf diese in die vorgegebene neue Wechselseitige umzuwandeln.

III.

Von den Modificateuren oder denjenigen Vorrichtungen, wodurch eine Bewegung augenblicklich unterbrochen oder umgeändert wird.

29. Classification derjenigen Theile der Maschinen, mit welchen die Bewegung augenblicklich unterbrochen oder verändert werden kann. — Jede Vorrichtung, mittelst welcher die Bewegung von einem oder von verschiedenen Maschinentheilen nach Belieben und gleichsam in einem Augenblicke umgeändert oder unterbrochen werden kann, oder womit eine bereits unterbrochene Bewegung wieder herzustellen ist, nennt man einen Modificateur.

Man kann dieselben nach den verschiedenen Zwecken, wozu sie verwendet werden, in drei Classen theilen. In die erste derselben gehören diejenigen, welche dazu bestimmt sind, die Bewegung zu unterbrechen, oder eine bereits unterbrochene Bewegung wieder herzustellen. Die zweite Classe enthält diejenigen, wodurch der Zustand der Bewegung augenblicklich verändert werden kann. Häufig üben die Maschinen selbst die Funktion der Modificateure dieser Classe aus, und zwar mittelst eines aus Sperrkegeln, Sperrrädern 2c zusammengesetzten Mechanismus. Endlich umfaßt die dritte Classe diejenigen Modificateure, wodurch die Geschwindigkeit einer Maschine, oder eines Maschinen-

theils vermindert oder vermehrt wird, ohne diese in ihrer Wirkung zu hemmen. Wir werden nun die wichtigsten dieser drei Classen, welche sich durch ihre guten Eigenschaften und durch den Gebrauch als zweckmäßig bewiesen haben, kurz durchnehmen, nachdem wir zuvor einige unerläßliche Begriffsbestimmungen voraus gesendet haben.

Man nennt einen hohlen auf eine Welle aufgesteckten Cylinder eine Muffe; dieselbe bildet entweder einen für sich bestehenden Theil, oder ist mit einem Rade oder einer Rolle fest verbunden, und von einer Trommel nur darin verschieden, daß diese aus Stäben und Scheiben zusammengesetzt, jene hingegen massiv ist. Jedes Rad oder jede Rolle, jede Muffe oder Trommel, welche so mit einer rotirenden Welle verbunden ist, daß sie mit dieser einen einzelnen soliden Körper bildet, nennt man: ein festes Rad, eine feste Rolle 2c. Wenn ein Rad oder eine Muffe nur nach der Längen-Richtung auf einer Welle verschiebbar ist, sich aber nicht um dieselbe herumdrehen kann, so nennt man sie: ein gleitendes Rad, eine gleitende Muffe 2c. Endlich wenn ein Rad oder eine Rolle sich auf einer Welle nicht verschieben, wohl aber ohne Hinderniß um dieselbe drehen kann, so heißen sie: ein loses Rad, eine lose Rolle (Leerrolle).

Wir werden in Betreff der festen Räder 2c. nichts weiter erwähnen, dagegen bemerken wir in Bezug auf die gleitenden Räder 2c., daß man ihnen diese Eigenschaft auf zweierlei Weise ertheilt; entweder vereinigt man sie unveränderlich fest mit der Welle, und ordnet letztere so an, daß sie sich nach ihrer Länge in den Zapfenlagern verschieben kann, oder man bearbeitet die Höhlungen (Axenlöcher, Augen) der Räder mit solcher Genauigkeit, daß diese auf der gleichfalls genau bearbeiteten Welle mit wenig Spielraum und schwacher Reibung hin und her gleiten, und durch ihre gegenseitig vorspringenden Kanten oder Ränder gezwungen werden, dieselbe rotirende Bewegung, welche man

der Welle ertheilt, anzunehmen. Zur Erreichung dieses Zweckes wählt man zum Querschnitt für die Welle und für das Auge des Rades ein Quadrat (Fig. 82[a]) oder irgend eine reguläre Figur (Fig. 82[b]), die von ein- und auswärts gehenden krummen Linien begrenzt ist. Allein es ist sehr schwierig, zwei solche Formen übereinstimmend und ohne bedeutenden Spielraum anzufertigen: daher ist es zweckmässiger, zum Querschnitte für Beide einen Kreis zu nehmen, weil diese Form mit großer Vollkommenheit auf der Drehbank ausgeführt werden kann, und auf der Welle (Fig. 82[c]), oder innerhalb des Axenloches (Fig. 82[d]) einen Vorsprung (eine Zunge) von prismatischer oder cylindrischer Gestalt anzubringen, der in einen in dem Axenloche oder in der Welle eingeschnittenen Falz von entsprechender Länge (Fig. 82[e]) einpaßt, und sich darin hin- und herschieben läßt. Die Verbindung der gleitenden Räder mit den Wellen kann auch auf folgende Weise stattfinden. Beide, die Welle CD (Fig. 83) und das Auge der Muffe oder des Rades haben einen Kreis zum Querschnitt; zuweilen ist auch, wenn die Breite des Rades, nach der Richtung ihrer Axe gemessen, geringe ist, dasselbe mit einer Muffe fest verbunden, oder bildet vielmehr mit dieser ein einzelnes Stück (Fig. 84). Diese Muffe ist nun auf ihrer Aussenfläche vollkommen cylindrisch, und in derselben parallel mit der Axe ein Falz oder eine Nute angebracht, worinnen ein prismatischer, eiserner Theil AB hin und her gleitet*). Die Länge AB desselben hängt von dem Wege ab, welchen das gleitende Rad zu durchlaufen hat; seine beiden Ende sind mittelst der Kniestücke AE und BE mit der Welle CD fest verbunden. Es ist nun leicht abzunehmen, daß, je größer der Abstand zwischen dem Theil AB und der Axe der Welle,

---

*) Ist die Muffe mit einem Rade verbunden, so muß das Querstück AB (Fig. 84) durch eine in Letzterem angebrachte Oeffnung gehen.

und je kürzer AB ist, desto dauerhafter diese Verbindung sein wird. Wenn die Muffe eine ziemliche Länge hat, so ist es nicht nöthig, nach ihrer ganzen Länge einen Falz auf deren Oberfläche anzubringen, sondern es genügt in diesem Falle, an jedem Ende derselben zwei Ohren anzusetzen (Fig. 85), zwischen welchen der prismatische Theil AB liegt.

Die Anordnung eines losen Rades (oder einer losen Rolle) ist sehr einfach. Das Auge des Rades oder der Rolle erhält zum Querschnitt einen mit der Peripherie derselben concentrischen Kreis, dessen Halbmesser dem der cylindrischen Welle gleich ist, so daß das Rad oder die Rolle sich mit geringem Spielraum und ohne zu schlottern um die Welle drehen kann. Ausserdem stützt es sich gegen einen um die Welle herumlaufenden Vorsprung und wird durch einen vorgelegten, an der Welle befestigten Ring in der vorgeschriebenen Lage erhalten und dadurch verhindert, daß es auf derselben gleiten kann.

Vorstehendes wird zum Verständniß der Anordnung der gleitenden und losen Räder ꝛc. hinreichend sein, und wir gehen nun zur Betrachtung der ersten Classe der Modificateure über, die man gewöhnlich auch mit dem Namen: Ausrückungen und Einrückungen belegt.

30. Aus- und Einrückung gezahnter Räder. — Die Fig. 86 zeigt die Anordnung, wodurch zwei Räder außer dem Eingriff gebracht werden. A ist ein festes mit der Axe ef vereinigtes Rad und B ein Zweites, das auf der Welle EF vor- und rückwärts gleiten kann und mit der Muffe C verbunden ist. Diese ist auf ihrem Umfange mit einer rings herum laufenden Nute versehen, worin ein um den Punkt D beweglicher Hebel Db liegt und sich mit seiner Ausbauchung a gegen die, durch die Nute gebildeten Vorsprünge (Ränder) der Muffe C stemmt. Anstatt der Ausbauchung a könnte man auch zur Verminderung der Reibung eine Rolle an dem Hebel anbringen. Das Ende b desselben ist mit einer Schnur verbunden,

mittelst welcher er zurückgezogen werden kann; geschieht dieses in der Richtung des Pfeils, so stemmt sich die Ausbauchung a (oder die Rolle a) (Fig. 87) gegen den Vorsprung c der Muffe, das mit ihr verbundene Rad gleitet längs der Welle vorwärts, und beide Räder kommen dadurch außer Eingriff. Befinden sich dieselben schon in diesem Zustand, und der Hebel wird im entgegengesetzten Sinne bewegt, so kommen sie in Eingriff.

Diese Anordnung, so wie jede andere damit Übereinstimmende kann jedoch in dem Falle nicht angewendet werden, wenn die Theile einer Maschine eine sehr beträchtliche Masse besitzen und mit einer großen Geschwindigkeit begabt sind. Denn will man ein in Ruhe befindliches Rad derselben aus diesem Zustand in den der Bewegung, durch die Verbindung mit den übrigen in Bewegung befindlichen Theilen, augenblicklich versetzen, so muß dessen Trägheit in dem Moment des Einrückens überwunden werden, was zur Folge hätte, daß sich ein Stoß erzeugt, der hinreichend wäre, die Zähne an ihren Wurzeln abzubrechen. Deswegen wendet man diese Art der Aus- und Einrückung nur in den Fällen an, wo entweder die Maschine einen sehr langsamen Gang besitzt, oder wo dieselbe zuvor, ehe der Akt des Einrückens stattfindet, in Ruhe versetzt werden kann.

31. Aus- und Einrückung mittelst der Klauenscheiben. — Um den Bruch unter allen Umständen, wo derselbe stattfinden könnte, zu vermeiden, macht man das Rad **B** lose und unabhängig von der Muffe **C**, indem man beide trennt (Fig. 88). Die Muffe gleitet alsdann auf der Welle und wird dem Rade **B** auf dieselbe Weise, wie im vorigen §. angegeben wurde, mittelst des Hebels **EDa** genähert, oder von demselben entfernt, ohne daß es dadurch außer Eingriff mit dem Rade **A** kommt. Die Verbindung der Muffe mit dem Rade wird nun auf verschiedene Weise bewirkt. Bald wird sie seitwärts mit zwei zahnförmigen Vorsprüngen (Klauen) dd versehen, welche sich in zwei, in der Seitenfläche des Rades **B**

angebrachte Löcher hineinschieben, wenn man die Bewegung des Rades **B** auf die Welle **EF** übertragen will. In sofern hier durch das Einrücken in Folge des erzeugten Stosses ein Bruch stattfände, würde sich dieser nur an den beiden Vorsprüngen dd äußern, was mit mindern Nachtheilen verbunden ist, als ein Bruch der Zähne des Rades **B**. Bald ist das Rad **B** seitwärts mit einer kreisförmigen Platte **M** (Fig. 89) vereinigt, deren Vorsprünge a,b,c gegen den Mittelpunkt convergiren und die in eine zweite ähnliche, mit der Muffe **C** verbundene Platte **N** eingreifen; so wie durch die Verrückung der Muffe die gegenseitigen Vorsprünge der beiden Platten sich in einander schieben, theilt sich die Bewegung des Rades **B** der Welle und durch diese einem andern damit verbundenen gezahnten Rade oder einer Rolle mit, die dann die Bewegung weiter fortpflanzt. Bisweilen haben die beiden Platten, statt der senkrechten Vorsprünge, hakenförmige Zähne, wie aus der Figur 90 zu ersehen ist. Endlich wird die Muffe **C**, so wie die Platte **M** (Fig. 91) mit dem losen Zahnrad **B** fest vereinigt, wodurch dieses die Eigenschaft erhält, daß es zugleich l o s e und g l e i t e n d ist. Die andere Platte **N** wird dann unveränderlich fest mit der in den Lagern m, m liegenden Welle **EF** verbunden. Damit beim Einrücken das Rad **B** nicht ausser Eingriff mit dem Rade **A** komme, muß jenes eine angemessene Länge besitzen.

31. Frictionskegel. — Anstatt die Ein- und Ausrückung eines losen Rades und einer gleitenden Muffe durch in einander greifende Vorsprünge zu bewirken, kann man dafür zwei in einander passende hohle Kegel substituiren, deren Einer **A** (Fig. 92) mit dem Rade **B** und der Andere **D** mit der Muffe **C** fest verbunden ist. Drückt man nun diese und den mit ihr vereinigten Kegel gegen jenen an, so wird durch die zwischen beiden Kegeln entstehende Reibung die Bewegung des Rades allmählig auf die Welle übertragen, und man hat es gänzlich in seiner Gewalt, diese Reibung durch Vermehrung des gegen die Muffe ausgeübten Seitendruckes mehr und mehr zu vergrößern. Man kann also mit dieser

Vorrichtung die Stöße, womit das augenblickliche Einrücken begleitet ist, völlig unschädlich machen. So vorzüglich dieselbe von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet erscheint, so eignet sie sich jedoch für kräftig wirkende Maschinen nicht, weil die zum Einrücken erforderliche Kraft sehr beträchtlich sein müßte. Denn nennt man F die Kraft, welche den Kegel ABCD (Fig. 93) in den Andern hineindrückt, so kann man dieselbe in eine Anzahl anderer gleicher Kräfte q, die normal auf die innere Fläche des äussern Kegels wirken, zerlegt denken und $q + q + q + \ldots = Q$ setzen, wo Q den gesammten Normaldruck bezeichnet; ferner kann man die Angriffspunkte dieser Kräfte in einen Kreis — in dem sich beide Kegel berühren — dessen Halbmesser r der Mittlere zwischen denjenigen Aq und Bp ist, versetzt annehmen. Der gesammte Normaldruck wird dann durch

$$2\pi r q = Q$$

repräsentirt und ist demjenigen analog, welchen ein Keil, der die Bestimmung hat, einen Körper zu spalten, auf seine seitlichen Stützpunkte ausübt. Nun kann man annehmen, daß der Kegel ABCD die Wände des äussern Kegels von einander zu treiben strebe; in Folge dieser Wirkung wird jener um einen sehr kleinen Weg, parallel mit sich selbst, vorwärts bringen und dadurch in die Lage abcd kommen. Der auf der Richtung der Kraft F durchlaufene Weg ist dann gleich Aa, folglich die Arbeit dieser Kraft gleich $F \times Aa$. Fällt man von a auf die Seite AB des Kegels die Senkrechte ao, so ist ao der Weg, welchen der Normaldruck durchläuft, während die Kraft F denjenigen Aa zurücklegt; es ist mithin die Arbeit von einem Elemente des normalen Druckes gleich $q \times ao$ oder diejenige des ganzen Normaldrucks gleich $Q \times ao$. Die gesammte nach den Richtungen der Kanten des Kegels stattfindende Reibung wird also durch μQ ausgedrückt sein, und der Weg, den dieselbe beschreibt, ist augenscheinlich kein anderer, als Am. Die ganze Arbeit der Reibung wird also durch $\mu Q \times Am$ ausgedrückt.

Man hat also:

$$F \times aA = (Q \times ao) + (\mu Q \times Am)$$

und hieraus

$$F = \frac{ao + (\mu + Am)}{Aa} . Q \qquad (\alpha)$$

Nun muß die Reibung μQ der Kraft **P** gleich sein, die in dem Berührungskreise beider Kegel wirkt und welche erforderlich ist, um dieselben während ihrer Bewegung in gegenseitiger Berührung zu erhalten.

Es ist also:

$$P = \mu Q; \text{ oder } Q = \frac{P}{\mu}$$

substituirt man diesen für **Q** erhaltenen Werth in die Gleichung (α), so ist:

$$F = \left(\frac{Am}{Aa} + \frac{ao}{\mu \times Aa}\right) P.$$

Dieser Werth zeigt uns: daß die Kraft **F** um so geringer ist, je kleiner $\frac{ao}{Aa}$ und je größer der Reibungs-Coefficient μ ist. Da $\frac{aa}{Aa}$ die Neigung einer Kante des Kegels zu dessen Axe ausdrückt, so schließt man daraus, daß, je spitziger dieser Winkel und je rauher die sich berührenden Flächen sind, desto wirksamer die Kraft **F** sich äussern und desto größer die zwischen den beiden Kegelflächen erzeugte Reibung sein wird *).

---

*) Denn in den ähnlichen Dreiecken Asq und Aao ist:

$$AQ : ao = As : Aq$$

und

$$Am : Aa = As : sq$$

Bezeichnet nun $As = 1$ die Länge einer Kante des Kegels, $Aq = R$ den Halbmesser der Grundfläche und $sq = h$ die Höhe derselben, so ist:

32. Aus- und Einrückungen mit dem Frictions-Zügel (der Frictionsklaue). — Die Peripherie eines mit seiner Welle DD′ (Fig. 96)

$$l = \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$\frac{ao}{Aa} = \frac{R}{l}; \quad \frac{Am}{Aa} = \frac{l}{h}$$

$$F = \left(\frac{l}{h} + \frac{R}{\mu l}\right) P$$

$$= \frac{\mu l^2 + Rh}{\mu hl} . P \qquad (\beta)$$

damit der Ausdruck: $\frac{ao}{Aa}$ den kleinsten Werth annehme, muß für einen constanten Halbmesser R die Höhe des Kegels so groß wie möglich genommen werden.

Gewöhnlich ist h unbekannt, dagegen sind die Dimensionen des Kegelrumpfes ABCD — welcher von dem eben betrachteten Kegel ein Abschnitt ist — gegeben und man soll mittelst derselben und des an der mittlern Peripherie des Frictionskegels wirksamen Widerstandes P die Größe der Kraft F, die in der Richtung des gleitenden Kegels (Fig. 92) angebracht werden muß, bestimmen.

Bezeichnet man in diesem Falle die beiden Halbmesser Bp und Aq (Fig. 93) mit r und R die Höhe des Kegelrumpfes Bu = pq mit a, so hat man:

$$Au : uB = Bp : ps$$

$$\text{oder } R - r : a = r : h - a$$

und hieraus

$$h = \frac{aR}{R - r}.$$

Man berechnet also zuerst den Werth h, hierauf aus

$$l = \sqrt{R^2 + h^2}$$

den Werth l und substituirt beide in (β), so erhält man die Größe der Kraft F.

fest verbundenen Rades BB′ ist falzförmig ausgedreht und

Nicht zu übersehen ist hiebei, daß der Hebel, womit der gleitende Frictionskegel eingerückt wird, gegen die Seitenwand der Nute einen Druck gleich F und dadurch einen Reibungswiderstand erzeugt, der ebenfalls in Rechnung gebracht werden muß.

Es sei z. B. R = 4,2″; r = 4″; a = 3″; und P = 50 ℔; bestehen beide Frictionskegel aus Gußeisen, so ist nach (2 Abth. 106) $\mu = 0{,}28$ und man findet

$$F = 61\tfrac{1}{2} \text{ ℔.}$$

Wirkt diese Kraft an einem Hebel, dessen Arme das Verhältniß 1 : 5 haben : so ist die am Ende desselben erforderliche Kraft

12,1 ℔. (annähernd)

Wird hingegen dessen Reibung an der Seitenwand der Nute berücksichtigt, so ist an seinem Ende eine Kraft, gleich

$15\tfrac{1}{2}$ ℔. (annähernd)

erforderlich. Ausserdem verursacht der nach der Längen-Richtung der Welle stattfindende Druck F einen, an den Seitenflächen der Ränder stattfindenden Reibungs-Widerstand, der besonders nach (2 Abth. 120) zu berechnen ist. Anstatt der Frictionskegel kann man auch nach Umständen Frictions-Scheiben anwenden. Dieselben bestehen aus einem losen Rade A (Fig. 94), das mit einer, auf ihrer Seitenfläche vollkommen ebenen Scheibe B vereinigt ist und aus einer, auf der Welle EF gleitenden Muffe C, die mit einer ähnlichen Scheibe D verbunden ist. Wird nun diese gegen jene angedrückt, so trägt sich in Folge der zwischen beiden entstehenden Reibung die Bewegung des Rades A auf die Muffe C und durch diese auf die Welle EF über. Bewegt sich das Rad A mit großer Schnelligkeit, so ist es zweckmäßig, die Scheibe D und die Muffe C zu trennen, jene lose zu machen und dann beide durch eine Schleppfeder zu vereinigen. Die Fig 95. zeigt diese Anordnung; ab ist die Scheibe D, cd die Schleppfeder und ef die Muffe C.

ein aus zwei Theilen bestehender, mit den Lappen e, f versehener eiserner Ring paßt genau in diesen Falz. Durch die beiden Lappen e, f gehen Schrauben, welche die beiden Theile des Ringes vereinigen; werden diese stärker angezogen, so kann man dadurch nach Belieben den Druck dieses Ringes gegen den Umfang des Rades und folglich auch die zwischen Beiden während der Bewegung stattfindende Reibung vermehren. C ist eine gleitende, mit den Klauen A,A' fest verbundene Muffe, die auf ihrem Umfange, für die Aufnahme des Einrückhebels, rinnenförmig ausgedreht und auf einer zweiten Welle EE' angebracht ist. Ein mit dem Ende E derselben vereinigtes Querstück FF hat zwei Einschnitte g,g, in welchen die beiden Klauen A,A liegen und darin vor- und rückwärts gleiten können. Wenn nun die Muffe C eingerückt wird, und die Welle DD' rotirt, so stemmen sich die beiden Lappen e,f gegen die, über die Einschnitte g,g vorragenden Klauen A,A und treiben diese, so wie die mit ihr verbundene Welle EE herum, in sofern die Reibung zwischen dem Zügel und dem Rade größer, als der an dieser Rolle sich äußernde Widerstand ist. In dem Moment, wo die Lappen des Zügels sich an die Klauen anlegen, widersetzt sich die mit der Muffe vereinigte Welle in Folge ihrer Trägheit der beginnenden Bewegung, und der Zügel gleitet ziemlich langsam um das Rad; aber bald wird die Geschwindigkeit in dem Angriffspunkte der Reibung so beträchtlich, daß das Rad und der dasselbe umschließende Zügel sich gleichmäßig bewegen und von diesem Augenblicke an in constanter Berührung mit einander verbleiben.

Daß der Frictionszügel auf einer einzelnen Welle ebenfalls angebracht werden kann, ist ohne weitere Erläuterung leicht einzusehen, nur muß in diesem Falle entweder die Muffe oder das Rad lose sein.

33. Verschiedene Ausrückungsarten der Muffe. — Bereits in § 30 haben wir von dem einfachen Ausrückungshebel mit der Ausbauchung oder mit der Rolle gesprochen; ist ein einfacher Hebel nicht ausreichend,

so werden mehrere mit einander Verbundene angewendet, wodurch der durchlaufene Weg der Kraft vergrößert, dagegen derjenige der Muffe vermindert wird. Das vollkommenste Mittel, um eine Muffe auszurücken und zwar durch die Thätigkeit der Maschine selbst, ist das nachstehend Beschriebene, welches in der Gießerei zu Toulouse durch den Bataillons-Chef Auberton inventirt wurde. Eine gleitende Muffe **C** (Fig. 97) ist auf ihrem Umfange schraubenförmig ausgehöhlt. Eine Art Hebel **abd** ist um die beiden, seitwärts der Welle **EF** angebrachten festen Träger **G**, **G** beweglich und bei **e** mit einer zapfenförmigen Klaue verbunden, deren Durchmesser etwas kleiner, als die Breite des Schraubenganges der Muffe ist und folglich mit mäßigem Spielraum in diesem gleiten kann. Will man ausrücken, so dreht man den Hebel **abd** um seine Axen **a** und **b** so weit herum, bis die Klaue auf der Oberfläche der Muffe aufliegt; in dem Augenblick, wo die Vertiefung des Schraubenganges sich gerade unter der Klaue **e** befindet, fällt diese in jene hinein, und im nächsten Moment wird sich die Seitenwand **m n** des Schraubenganges gegen die Klaue stemmen; in Folge der fortdauernden Bewegung der Muffe wird nun diese zurückgezogen, ausser Eingriff mit dem losen Rade **D** gebracht und somit die Verbindung zwischen diesem und der Welle unterbrochen.

In der Figur **97** ist der Hebel **abd** zurückgeschlagen und folglich die Muffe **C** im Eingriff mit dem Rade **D**. Hingegen in der Figur **98** liegt die Klaue **e** des Hebels **abd** in der Vertiefung des Schraubenganges, und die Ausrückung beginnt so eben.

34. Aus- und Einrückung der Seil- und Riemen-Wellen. — Auf der Welle **EF** (Fig. 99) ist eine l o s e und eine f e s t e Rolle **A** und **B**, beide dicht neben einander, angebracht.

Wird der Riemen **C**, der die Bewegung auf die Welle **EF** übertragen soll, um die lose Rolle **A** gelegt, so ist diese Uebertragung unterbrochen und die Welle **EF** verbleibt in

Ruhe; wird er hingegen auf die feste Rolle **B** hinübergeschoben, so beginnt in dem Augenblick, wo er in vollständiger Berührung mit ihrem Umfange ist, die Bewegung der Welle **EF**. Um nun den Riemen bequem von einer Rolle auf die andere zu bringen, läßt man ihn durch eine eiserne Gabel **ab** laufen, die mittelst einer damit verbundenen Stange oder eines Hebels um eine Größe, die der Breite der Rollen gleich ist, verschoben werden kann. Dieselbe Gabel kann aber nicht angewendet werden, wenn statt der Riemen ein Seil um die für die Aufnahme derselben auf ihren Peripherieen ausgehöhlten Rollen geschlungen ist; in diesem Fall bringt man an den beiden einander gegenüber befindlichen Seitenarmen der Gabel Röllchen **a** und **b** (Fig. 100) an, welche das zwischen ihnen durchgehende Seil **C** umschließen. Die Gabel selbst endigt sich in einem Stab, der um **O** mittelst des Hebelarmes **LO** bewegt werden kann.

Vertikal laufende Riemen rückt man dadurch aus, daß man die Spannrolle derselben zurückzieht. Denn sobald dies geschieht, verläßt der Riemen **C** (Fig. 101) die untere Rolle **A**, an welcher die bewegende Kraft thätig ist und hängt schlapp herab, oder ist wenigstens in so loser Berührung mit derselben, daß durch ihn keine Uebertragung der Bewegung statt finden kann und folglich die Rolle **B** still steht.

Daß dieses Verfahren, die Bewegung eines Riemens abzustellen, nur bei vertikal laufenden und nicht bei horizontal liegenden angewendet werden kann, wird kaum nöthig sein zu erwähnen.

35. **Aus- und Einrückung mittelst beweglicher Zapfenlager.** Man kann ebenfalls zwei Räder ausrücken, indem man eines ihrer Zapfenlager verrückbar macht. Wenn diese Räder die Bewegung mittelst Seilen, Riemen oder Ketten ohne Ende in vertikaler Richtung auf einander übertragen, so ist es hinreichend, den Träger des einen Zapfenlagers **a** (Fig. 102) etwas weniges zu erheben oder zu senken, was mittelst eines um den Punkt

O beweglichen Hebels boc, oder noch besser mittelst eines vertikal herabgehenden Seils cf geschehen kann. Diese Vorrichtung dient in den Mahlmühlen zur Bewegung des Sackzuges. Man wendet zu gleichem Zwecke zwei ungezahnte Räder an, deren Stirnflächen (Umfänge) gegen einander gedrückt werden und sich in Folge der zwischen ihnen entstehenden Reibung gegenseitig bewegen (Fig. 103); wenn man den Druck, womit sie gegen einander gepreßt werden, vermindert, oder sie von einander trennt, so wird dadurch ihre Bewegung unterbrochen. Gleichermassen macht man von derselben Methode Gebrauch, um zwei gezahnte Räder ausser Eingriff zu setzen. Ein in A (Fig. 104) um einen Bolzen beweglicher Träger AB, in dessen Mitte das Zapfenlager b befestigt ist, ruht bei B auf dem Vorsprung des um die Axe a beweglichen Hebels EF. Drückt man den längern Arm desselben so weit herab, bis er eine vertikale Richtung hat, so erhebt der Vorsprung desselben den Träger AB und dieser liegt dann winkelrecht auf jenem auf. Zwei ähnliche Vorrichtungen werden gewöhnlich angewendet, um die beiden Zapfenlager des Rades zu erheben.

Zuweilen rückt man die Welle parallel mit sich selbst aus, indem man die Zapfenlager derselben in einer Führung C (Fig. 105) anbringt und dieser mittelst zweier Zahnstangen (wovon hier nur eine zu sehen ist) und zweier mit einander verbundener Getriebe die Bewegung mittheilt.

36. Verfahren, die Richtung der Umdrehungen der Wellen umzukehren. — Wenn man die Richtung der rotirenden Bewegung einer Axe in die entgegengesetzte beliebig umkehren will, so ist es hinreichend, eine doppelte Muffe, d. h. eine solche anzuwenden, die sich auf einer Welle zwischen zwei losen Rädern befindet und abwechselnd bald mit dem Einen, bald mit dem Andern mittelst ihrer Klauen in Eingriff gebracht werden kann. C und D (Fig. 106) sind zwei feste Räder,

welche sich in entgegengesetzter Richtung drehen und in die beiden **losen** Räder **A** und **B** eingreifen, zwischen welchen die an beiden Enden mit Klauen versehene Doppel-Muffe **EF** gleitet. Wenn man dieselbe gegen das Rad **A** hinschiebt und mit diesem in Verbindung bringt, so dreht sich die Welle nach derselben Richtung wie jenes Rad; schiebt man hingegen die Muffe gegen das Rad **B** und setzt sie mit diesem in Verbindung, dann nimmt die Welle die Bewegung dieses Rades an, die der des Rades **A** entgegengesetzt ist. Diese Vorrichtung ist zu Clichy nahe bei Paris angewendet, um die Bewegung eines Bley-Walzwerkes, auf dem sehr starke Platten gestreckt werden, wechselsweise umzukehren; die Bewegung desselben ist sehr langsam und gestattet daher das Aus- und Einrücken, ohne zuvor die Maschine abzustellen, indem ihre Geschwindigkeit und folglich auch ihr Moment der Trägheit sehr geringe ist.

Die doppelte Muffe dient auch dazu, die rotirende Bewegung einer Welle, deren Längen-Richtung winkelrecht zu derjenigen einer andern Welle ist, auf eine sehr einfache Weise umzukehren, so daß jene sich bald in dem einen, bald im entgegengesetzten Sinne dreht. **A** (Fig. 107) ist ein Rad, durch welches die Bewegung auf die Welle **BC** und auf das feste konische Rad **D** übertragen wird; Letzteres greift in die beiden auf der Welle **LM** angebrachten **losen** Räder **G** und **H** ein. Zwischen Beiden befindet sich die gleitende Doppel-Muffe **EF**, die abwechselnd bald mit dem Rade **G**, bald mit dem Rade **H**, mittelst ihrer an beiden Enden befindlichen Klauen in Eingriff gebracht werden kann und somit die Welle **LM** entweder in dem einen oder in dem andern Sinne dreht.

87. **Verfahren, die Geschwindigkeit der Bewegung zu verändern.** — Um augenblicklich die Geschwindigkeit der Bewegung zu verändern, wendet man verschiedene Apparate an, von denen wir die vier hauptsächlichsten näher betrachten wollen. Der erste derselben besteht aus zwei Systemen mit einander verbundener, auf parallelen Axen

aufgezogener Rollen (Fig. 108). Ihre Anordnung muß in der Art statt finden, daß, wenn z. B. die Durchmesser der obern Rollen von der Linken zur Rechten zunehmen, diejenigen der untern Rollen in derselben Richtung auf einander folgend abnehmen und immer die Summen der Durchmesser zweier zusammen gehöriger (vertikal über einander befindlicher) Rollen eine constante Größe bilden müssen. Mit einem Worte, die Entfernungen ab, cd ꝛc. zwischen je zwei und zwei zusammen gehörigen Rollen müssen einander gleich sein. Ein Riemen ohne Ende ist um zwei solche Rollen geschlungen und durch Handgriffe, die besser an Ort und Stelle eingesehen, als beschrieben werden können, wird derselbe rasch von einem Paar auf ein anderes Paar während der Bewegung gebracht. Dadurch wird die Geschwindigkeit der untern Welle modificirt, und dieselbe ist rascher oder langsamer, als die der obern Welle, je nachdem der Durchmesser der untern von dem Riemen umspannten Rolle kleiner, oder größer, als derjenige der damit correspondirenden obern Rolle ist.

Die wechselseitigen Kegel sind gleichermassen auf parallelen Axen aufgezogen und von einem Riemen ohne Ende umschlungen (Fig. 109). Ihre entgegengesetzten in der Ebene ihrer Axen liegenden Kanten sind einander parallel. Man kann die Geschwindigkeit mittelst derselben augenblicklich verändern, indem man den Riemen mittelst einer Klaue an die entsprechende Stelle der Kegel hinführt.

Ein großes mit seiner Welle fest verbundes planes Rad A (Fig. 110) dreht sich um seine Axe, und ein anderes Kleineres B, das gleichfalls mit seiner Axe fest verbunden ist, kann nach der Längen-Richtung desselben in den Lagern C und D hin- und hergleiten, und seine Peripherie ist mit der Seitenfläche des größern Rades in stetiger Berührung. Indem man nun das Rad B mehr oder weniger von dem Centrum des Rades A entfernt, kann die durch einfache Berührung beider Räder übertragene Geschwindigkeit beliebig vermehrt oder vermindert werden.

Endlich ist der letzte der erwähnten Apparate ein mit einem Kegel in Berührung befindliches Rad B (Fig. 111), dessen Axe cd parallel mit der Kante ab des Kegels A ist. Je größer der Durchmesser desjenigen Kreises des Kegels ist, mit welchem das Rad B sich in Berührung befindet, desto beträchtlicher ist die Geschwindigkeit dieses Rades.

38. **Verfahren, die Bewegung in auf einander folgenden Zeiträumen zu verändern.** — Wir haben die verschiedenen Verfahrungsarten, die Bewegung einer Maschine bleibend zu modificiren, angegeben; hier folgen nun noch diejenigen, wodurch die Veränderung in Zeit-Zwischenräumen bewirkt wird.

I. Räder mit Auslösungen. Eine Welle ist an dem einen Ende mit einer Kurbel verbunden und erhält durch dieselbe ihre rotirende Bewegung; an irgend einer Stelle auf ihrem Umfange ist ein zahnförmiger Theil — eine Klaue — A (Fig. 112) befestigt und nahe an demselben ein loses Rad B auf der Welle aufgezogen. Auf der Seitenfläche desselben ist bei m ein Zapfen befestigt, um welchen sich der an seinem Ende b mit einem Vorsprung (einer Schnauze) versehene Hebel (die Auslösung) ab dreht, dessen Arm mb durch eine Feder s gegen die Axe der Welle gedrückt wird. Wenn die Welle in der Richtung des Pfeils herumgedreht wird, so steht das Rad B so lange still, bis die Klaue A gegen den Vorsprung b der Auslösung ab stößt; da die Feder s das Zurückweichen desselben verhindert, so muß von diesem Augenblick an das Rad B sich mit der Welle bewegen und ein mit dem Seile LD verbundenes Gewicht, oder einen Pumpenkolben rc erheben. In dem Momente aber, wo der andere Arm am der Auslösung ab gegen den festen Pflock (oder Nagel) E anstößt, wird jene gezwungen, sich um ihre Axe m zu drehen; die Schnauze b trennt sich von der Klaue A und das Rad B wird frei. Das erhobene Gewicht wirkt aber jetzt auf dasselbe und veranlaßt es, augenblicklich eine entgegengesetzte Bewe-

gung um die Axe anzunehmen. Jenes sinkt daher wieder herab, während die Welle ihre rotirende Bewegung fortsetzt. Nach einem vollbrachten Umgange derselben stemmt sich die Klaue wieder gegen den Vorsprung der Auslösung und das eben erläuterte Spiel dieser Vorrichtung beginnt von Neuem.

II. Rammen. — Eine der so eben Beschriebenen analoge Vorrichtung wird bei den Kunstrammen zum Auslösen des erhobenen Rammblockes angewendet, wobei jedoch die Bewegung nur geradlinig und nicht kreisförmig ist. A (Fig. 113) ist ein metallener Rammblock, welcher mittelst seines Bügels cd an dem Haken f des Schnellhebels ef angehangen ist. Dieser kann sich um einen in dem Kloben LM enthaltenen Bolzen g drehen und wird durch eine ebenfalls darin befestigte Feder x gezwungen, den Bügel cd zu ergreifen, wenn er diesem genähert wird. Ein um die Rolle D geschlungenes Seil ab ist mit dem Kloben LM verbunden und erhebt diesen nebst dem daran hängenden Rammblock A, bis der Schnellhebel ef gegen den Aufhalter B anstößt und gezwungen wird, sich um den Bolzen g zu drehen, wodurch sich der Haken f aus dem Bügel cd des Rammblockes löst, und dieser in Folge seines Gewichtes herabfällt. Wenn man hernach den Kloben LM wieder niederläßt, so wird der Haken f in Folge der Wirkung der Feder x den Bügel cd abermals ergreifen u. s. f.

III. Sperrrad. — Ein Sperrad B (Fig. 114) ist auf dem viereckigen Theil einer Welle befestigt und unmittelbar unter demselben befindet sich ein loses Rad C, das sich um den cylindrischen Theil der Welle drehen kann; ein Sperrkegel dab ist auf diesem mittelst einer Schraube (oder eines Stiftes) m, um welche er beweglich ist, befestigt; eine ebenfalls auf dem Rade C angebrachte Feder ce stemmt sich gegen den Schwanz d des Sperrkegels und zwingt ihn, fortwährend in die Zähne des Sperrrades einzugreifen. Wenn nun das Sperrrad und die mit demselben vereinigte Welle von der Linken zur Rechten herumgedreht wird, so ist dessen

Bewegung unabhängig von dem losen Rade **C**, weil die Zähne **m**, **m** 2c unter dem Sperrkegel **dab** weggleiten und daher dieses in Ruhe verbleibt; wird hingegen jenes von der Rechten zur Linken gedreht, so stemmen sich die Zähne **m m** 2c gegen den Sperrkegel **dab**, und das damit vereinigte Rad **C** ist genöthigt, dieselbe Bewegung anzunehmen.

Das Sperrrad wird in Uhrwerken angewendet, um die als bewegende Kraft dienende Feder zu spannen (aufzuziehen), indem es auf dem viereckigen Theil (dem Aufziehzapfen) der Federwelle befestigt wird und unter einem, an dem Gehäuse des Uhrwerks befestigten Sperrkegel weggleitet.

Dasselbe kann gleichermassen bei großen Maschinen angewendet werden, um die Wirkung der bewegenden Kraft während eines kurzen Zeitraums aufzuheben, ohne die Bewegung der Maschine zu hemmen. Eine solche Anwendung bei einer, durch ein Roßwerk bewegten Mahlmühle soll hier angeführt werden. Der Läufer derselben, welcher neunzig bis hundert Umgänge in der Minute macht, wirkt zu gleicher Zeit als ein Schwungrad, und man ist also nicht im Stande, seine Bewegung augenblicklich zu hemmen. Wenn daher das an die Deichsel gespannte Pferd augenblicklich still stünde und in diesem Zustande z. B. einige Minuten verbleiben wollte, so würde dies nicht möglich sein können, weil der Läufer in Folge seiner Trägheit die ihm eingedrückte Bewegung zu erhalten sucht und fortfährt, das Getriebe, welches mit dem Rade an der Hauptwelle im Eingriff ist, und folglich auch die mit dieser verbundene Deichsel zu drehen. Wir wollen nun sehen, auf welche Weise diese Rückwirkung beseitigt werden kann, damit sie sich vom Läufer aus nicht weiter als bis zur Welle des Getriebes verbreite. Bekanntlich ist eine Roßmühle so eingerichtet, daß die mit der Deichsel **AB** (Fig. 115) vereinigte vertikale Welle **CD** ein mit ihr fest verbundenes gezähntes Rad **EF** trägt, welches in das Getriebe **GH** eingreift, deren Welle **M** durch irgend eine Verbindung von Theilen die Bewegung auf den Läufer überträgt. Man hat also hier nur die Bewegung jener zu betrachten; und ver-

fährt nun folgendermassen, um den bezeichneten Zweck zu erreichen. Das aus zwei Scheiben (wovon in Fig. 116 die Eine durch CD dargestellt ist) und Stäben zusammengesetzte Getriebe wird lose auf der Welle M aufgezogen; durch jene geht ein prismatisches Stück Holz O quer durch und kann sich in den länglich viereckigen Oeffnungen m etwas auf- und abwärts bewegen. Mit der Welle M ist ein eiserner Ring pqr fest verbunden und derselbe bei m mit einem hakenförmigen Vorsprung versehen, dessen eine Fläche sich an das Holzstück O anlegt und die Andere tangentiel mit dem Ringe ausläuft. Nimmt man jetzt an, daß durch die Wirkung des Pferdes das Rad der stehenden Welle sich von E nach F (Fig. 116) bewegt, so ist es augenscheinlich, daß das Getriebe von C nach D herum getrieben und daß durch das gegen den Vorsprung m des Ringes pqr sich stemmende Holzstück O die Bewegung auf diesen und folglich auch auf die Welle M übertragen wird. Wenn nun durch irgend eine Veranlassung das Pferd augenblicklich anhält, so steht in diesem Moment das Rad EF und das Trieb CD still. Demohngeachtet wird sich die Welle M, vermöge ihrer Verbindung mit dem Läufer und in Folge der Trägheit desselben fortbewegen; der Haken m entfernt sich von dem Holzstück O, und nach einer beinahe vollständigen Umdrehung der Welle gleitet jener mit seiner schiefen Fläche unter dem Holzstück durch, indem dieses etwas zurückweicht, aber sogleich, wenn der Vorsprung des Ringes es verlassen hat, durch die Federn wieder in seine ursprüngliche Lage gebracht wird. Dieser Hergang wiederholt sich mit jedem Umgang der Welle M, ohne daß das Getriebe CD oder das Rad EF an dieser Bewegung Theil nimmt.

IV. Excentrischer Zaum. — Ein um die Axe a (Fig. 117) beweglicher Bolzen hat einen excentrischen Kopf E, welcher mittelst der Feder b gegen den Umfang ABC des mit der Welle D fest verbundenen Rades gedrückt wird. Wenn dieses sich nach der Richtung des Pfeils bewegt, so ist es augenscheinlich, daß der Kopf E dieser

Bewegung kein anderes Hinderniß, als den geringen Reibungswiderstand, der aus seinem Druck gegen die Peripherie entsteht, entgegensetzt. Wird aber durch irgend eine Veranlassung die Richtung der Bewegung umgekehrt, so stemmt sich der excentrische Kopf E gegen den Umfang des Rades und vernichtet allmählich die Bewegung *).

Die Hemmungen der Uhren gehören zwar auch zur Classe der Modificateure, womit wir uns hier beschäftigt haben, aber dieselben haben mehr den Zweck, die Bewegung zu reguliren, statt zu hemmen oder umzuändern.

---

*) Man kann diese excentrischen Zügel auch an den Seitenflächen eines Rades (Fig. 118) oder innerhalb desselben (Fig. 119) anbringen. In beiden Fällen ist der eben betrachtete, einfache excentrische Zügel verdoppelt.

Ihre Wirksamkeit hängt von der Größe des Winkels Dam (Fig. 117) ab. Je kleiner derselbe ist, desto größer ist der an der Peripherie des Rades erzeugte Widerstand. Denn die Kraft, welche an derselben wirksam angenommen werden kann, ist auf der Linie Dm (Fig. 120) senkrecht; drückt man sie durch mn aus und zerlegt sie nach mD und ma, so bezeichnen die Linien mp und mq die Drückungen auf die Axen D und a, und diese werden um so größer, je kleiner der Winkel Dam ist.

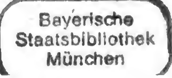
Aehnliche Vorrichtungen um einen in Bewegung befindlichen Theil einer Maschine allmählig zu hemmen, belegt man zuweilen auch mit dem Namen Bremsen.

IV.

Von den Vorrichtungen, mittelst derer die Wirkung der bewegenden Kräfte regulirt und die Gleichförmigkeit der Bewegung erhalten wird.

39. Von den Moderateuren. — Der Hauptzweck derselben ist, daß sie jeder Beschleunigung der Geschwindigkeit, die für den Effekt der Maschine nachtheilig oder selbst gefährlich werden könnte, entgegen wirken. Die Hemmvorrichtungen, die im Allgemeinen da, wo Räder sich in Bewegung befinden, angewendet werden und welche im größern oder geringern Grade die Reibung vermehren; der Fallschirm der Luftschiffer; die Windfänge der Bratenwender und der Spieluhren, welche durch ihre schnelle Bewegung in der Luft einen Widerstand hervorrufen, der rasch mit der Geschwindigkeit ihrer Axe wächst ꝛc. ꝛc. gehören namentlich in die Classe der Moderateure. Da dieselben einen großen Theil von der Leistung der bewegenden Kraft absorbiren, so muß man sie nur dann anwenden, wenn die Wirkung der bewegenden Kraft auf keine andere Weise regulirt werden kann.

I. Windfang. Die Bratenwender, die Spieluhren ꝛc. welchen durch ein niedersteigendes Gewicht die Bewegung mitgetheilt wird, sind gewöhnlich mit einem Windfange versehen, der aus einer vertikalen, am untern Ende mit einer Schraube ohne Ende verbundenen Welle besteht und die oberhalb derselben einen oder mehrere, mit Windflügeln versehene Arme trägt (Fig. 121). In die Schraube ohne Ende,



die ziemlich steil ansteigende Gänge hat, greift ein mit schief gestellten Zähnen versehenes Rad ein, welchem durch das Räderwerk der Maschine, vermöge der Wirkung des absteigenden Gewichtes die rotirende Bewegung mitgetheilt wird. Indem die Windflügel aa sich im Kreise herum bewegen, erleiden sie von der umgebenden Luft einen Widerstand, der beinahe mit dem Quadrat ihrer Geschwindigkeit wächst (1 Abth. 60). Wenn die Fläche der Windflügel so berechnet ist, daß für die bleibende Geschwindigkeit der Maschine ihr Widerstand in der Luft im Gleichgewicht mit dem, als bewegende Kraft dienenden Gewichte ist, so wird von diesem Augenblick an ihre Bewegung gleichförmig*).

*) Gewöhnlich sind die Arme, woran die Windflügel angebracht sind, cylindrisch und um jene, diese mit geringer Reibung beweglich, so daß man sie leicht in jede beliebige Lage bringen und dadurch der Luft eine größere oder kleinere Fläche darbieten kann. Auch befestigt man häufig diese Arme der Windflügel nicht unmittelbar an der vertikalen Welle, sondern vereinigt sie zuvor mit einer Hülse, die auf einen cylindrischen Theil der Welle genau paßt und mittelst einer kreisrunden Schleppfeder gegen einen Ansatz angedrückt wird, so daß sich die mit der Hülse vereinigten Arme und folglich auch die darauf angebrachten Windflügel mit mäßiger Reibung um die Welle drehen können. Durch diese Anordnung wird dem Abbrechen der Zähne des Rades in dem Falle vorgebeugt, wenn augenblicklich das Räderwerk der Maschine abgestellt wird, und die Windflügel in Folge ihrer erworbenen Centrifugalkraft fortfahren sich zu bewegen (in dem Atlas wird eine genaue Abbildung dieses Maschinentheils gegeben werden). Zu erwähnen ist hier noch, daß man die Schrauben ohne Ende, wegen ihrer beträchtlichen Neigung aus parallelen in einander laufenden Gängen bildet. In diesem Falle verhält sich die Anzahl der Umläufe der Schraubenspindel, zu einem Umlaufe des Rades wie die Zahl der Zähne zu der Zahl der in einander laufenden Schraubengänge, so daß z. B. bei 3 pa-

II. Hemmungen der Fuhrwerke. — Wenn Fuhrwerke von einem horizontalen Wege auf einen ziemlich abwärts geneigten übergehen, so erzeugt ihr Gewicht eine gefährliche Beschleunigung in ihrer Bewegung, und um den daraus entstehenden nachtheiligen Folgen zu entgegnen, muß man derselben einen größern Widerstand entgegen setzen. Da das gewöhnliche Hinderniß, welches die Fuhrwerke zu überwinden haben, der zwischen den Peripherien der Räder und dem Terrain sich erzeugende Widerstand ist, der durch walzende Reibung oder durch Reibung der zweiten Art entsteht, so kann der entgegen zusetzende Widerstand augenblicklich erzeugt werden, wenn man diese wälzende Reibung in eine gleitende umwandelt. Dies geschieht dadurch, daß man das Umdrehen der Räder zu verhindern sucht, in welchem Falle dann zwischen ihren Peripherien und dem Terrain eine gleitende Reibung entsteht. Damit die Reife, womit die Räder gewöhnlich beschlagen sind, sich nicht zu schnell abnützen, wendet man den bekannten Hemmschuh s (Fig. 122) an, welcher zwischen das Rad und das Terrain gebracht und durch eine an dem Fuhrwerk befestigte Kette in seiner ihm gegebenen Lage erhalten wird. Molard, Direktor des Conservatoriums der Künste und Gewerbe in Paris hat eine sehr einfache (oder vielmehr eine zweckmäßigere) Vorrichtung zur Erreichung dieses Zweckes angegeben. Dieselbe besteht aus zwei bogenförmig gekrümmten Holz- oder Metallstücken (Fig. 123), welche hinterhalb der beiden großen Räder in der Art angebracht werden, daß man sie mittelst einer Schraube den Peripherien derselben annähern und gegen diese anpressen kann. So wie man mittelst der Schraube den Druck vermehrt, wächst der, durch die zwischen den Bogenstücken und den Reifen der Räder entstehende Reibung erzeugte Widerstand proportional mit jenem, und veranlaßt

---

rallelen Schraubengängen und 36 Zähnen die Spindel des Windfanges 12 Umgänge, während eines Umganges des Rades macht.

zuletzt das gänzliche Stillstehen der Räder. Diese Vorrichtung ist dermalen an allen Diligencen in Frankreich angebracht und gewöhnlich so angeordnet, daß sie von dem Sitze des Condukteurs aus mittelst einer Verbindung von Hebeln dirigirt werden kann.

III. Die Bremsen. Dieselben haben den Zweck, den Gang einer Maschine plötzlich zu unterbrechen, oder die Bewegung derselben nach Belieben zu moderiren. Eine Bremse besteht in der Regel aus einem großen hölzernen Kreisbogen ABC (Fig. 124), der äußerlich mit einem eisernen Band beschlagen ist; das eine Ende desselben ist um einen festen Bolzen beweglich und das andere mit dem kürzeren Arm OC eines Winkelhebels boc verbunden. Wirkt nun eine Kraft P auf den größern Hebelarm ob, so wird dadurch die Bremse der Peripherie eines, mit der Maschine verbundenen, großen Rades genähert und zuletzt in unmittelbare Berührung mit derselben gebracht; durch die in diesem Augenblick entstehende Reibung erzeugt sich dann ein, der Bewegung der Maschine entgegen wirkender Widerstand, der mit der Vergrößerung der Kraft P wächst und endlich die Maschine zum Stillstehen bringt.

Man kann auch einen Hebel (Fig. 125) anwenden, dessen längerer Arm mit einem Gewichte P belastet und dessen kürzerer Arm an seinem Ende mit einem Riemen vereinigt ist, der einen Theil der Peripherie eines Rades, dessen Bewegung man anhalten oder moderiren will, umschließt und dessen anderes Ende an einem festen Gegenstand befestigt ist. Damit durch das Anspannen des Riemens das Rad nicht gehoben werden kann, muß dasselbe in geschlossenen Zapfenlagern liegen. Bei dieser Anordnung hat der Widerstand der Reibung keine Grenzen; denn man kann nicht nur das Gewicht P vergrößern, sondern man kann auch den Riemen mehrmals um das Rad herumschlingen, in welchem Falle die Reibung noch (2 Abth. 112) sehr rasch mit der Zunahme des umspannten Bogens wächst. Eine ähnliche Vorrichtung

wird angewendet, um die Bewegung der Hauptwelle einer Windmühle zu mäßigen oder gänzlich einzustellen.

Obgleich diese Bremsen den Nachtheil haben, daß sie einen ziemlichen Theil der wirksamen Kraft absorbiren, der als ein reiner Verlust zu betrachten ist, so sind sie für die Anwendung in vielen Fällen doch ohnstreitig von entschiedenem Nutzen. Wir haben zum Theil diese Wahrnehmung schon bei den Fuhrwerken — wo sie als Hemmungen dienen — gemacht, und dieselbe dringt sich uns noch bei vielen andern Fällen auf, wie z. B. bei den Haspeln, womit die gebrochenen Steine aus Steinbrüchen gehoben werden, und die gewöhnlich mittelst der an den Speichen derselben applicirten Kraft ihre rotirende Bewegung erhalten. Wird nun durch irgend eine Veranlassung ein solcher Haspel der alleinigen Wirkung der daran hängenden Last blos gestellt, so können dadurch sowohl für die Menschen, die an dem Haspel, als für die, welche im Grunde des Steinbruches arbeiten, sehr bedenkliche Unfälle entstehen. In allen solchen Fällen erfordert es daher die Vorsicht, Bremsen anzubringen, die auf die in Fig. 126 angegebene Weise angeordnet sind, und wo **L** die Welle des Haspels, **Q** die zu erhebende Last und **ABC** die bogenförmig ausgeschnittene Bremse bezeichnet, welche einen Theil der Welle umschließt und mit dem um den Bolzen **F** beweglichen Hebel **FG** fest verbunden ist. An dem Ende **G** desselben ist entweder ein Gewicht **P** angehangen, wodurch er gegen den Umfang der Welle gepreßt wird, oder es hängt von da aus ein Seil vertikal herab, woran ein oder mehrere Menschen auf ein gegebenes Zeichen gleichzeitig abwärts ziehen.

40. Regulateure. — Die Moderateure oder Bremsen können allerdings zur Regulirung der Bewegung der Maschinen verwendet werden. Da sie aber überall, wo man sie anwendet, Widerstände erzeugen, die einen großen Theil von der Leistung der bewegenden Kraft verzehren, so ist man übereingekommen, nur diejenigen Vorrichtungen **Regulateure** zu nennen, welche von den letzt genannten

Nachtheilen frei sind. Uebrigens ist die Natur eines jeden Regulateurs von der Art der bewegenden Kraft, von der Weise, wie der Operateur wirkt, so wie überhaupt von den Funktionen der Maschine abhängig. Daher ist die Zahl derselben auch sehr bedeutend, so daß wir sie hier nicht alle in Betrachtung nehmen können und uns daher nur auf die Hauptsächlichsten derselben, die wir nun in folgenden untersuchen werden, beschränken müssen.

41. Spiraltrommeln (Kegeltrommeln). Bei den Maschinen, die zum Fördern der Lasten aus tiefen Schächten, oder zum Erheben des Wassers aus Brunnen dienen, ist das gesammte zu erhebende Gewicht nicht constant, weil dasselbe in der Regel aus zwei von einander verschiedenen Theilen, aus der zu fördernden Last, welche constant ist, und aus dem Gewichte des herabhängenden Seils (oder Kette), das sich aber mit dessen Länge ändert, zusammengesetzt ist. Hat der Schacht oder Brunnen eine beträchtliche Tiefe, so kann das letztere Gewicht sehr beträchtlich werden. Da nun das Moment der Kraft, wodurch die Maschine in Bewegung gesetzt wird, als constant verbleibend betrachtet werden kann, so muß die Summe der Momente, die sich aus der zu erhebenden Last und aus dem sich verändernden Gewicht des herabhängenden Seils (oder Kette) ergeben, ebenfalls constant sein, wenn die Menschen, welche an der Maschine arbeiten, so wenig wie möglich ermüdet werden sollen. Geschieht nun die Förderung der Last mittelst einer, quer über dem Schachte oder Brunnen, horizontal liegenden Welle, die, durch die an ihren beiden Enden angebrachten Kurbeln oder Spillenräder, in Bewegung gesetzt wird, so ist es augenscheinlich, daß dieselbe eine von einem Cylinder abweichende Form erhalten müsse, wenn der letztern Bedingung entsprochen werden soll. Man nehme also an, die Welle besitze bereits die entsprechende Form und es sei auf derselben eine Anzahl concentrischer, über die ganze Länge derselben gleichförmig vertheilter Kreise gezogen. Nennen wir nun P (Fig. 127) die an den Kurbeln

der Welle applicirte Kraft, R den Halbmesser der Kurbeln, so ist $P \times R$ der Moment der Kraft, welcher der Voraussetzung gemäß constant ist. Bezeichnen wir ferner mit Q das zu erhebende constante Gewicht, mit l die Länge der herabhängenden Kette ba (von der Are der Welle bis zu einem beliebig angenommenen Punkte des Schachtes gemessen) und mit p das Gewicht eines laufenden Fußes derselben, so ist augenscheinlich, daß $p \times l$ das Gewicht der herabhängenden Kette ab und $Q + p \times l$ die gesammte zu erhebende Last, und zwar in dem Augenblicke, wo das Gewicht Q sich in dem, in dem Schacht angenommenen Punkte befindet, ausdrückt. Nennt man r den Halbmesser von einem der concentrisch gezogenen Kreise, auf welchem sich in demselben Augenblick das Seil (oder die Kette) aufwickelt, so bezeichnet $(Q + p \times l)\, r$ das Moment des Widerstandes und in Folge des Gleichgewichtes an der horizontalen Welle (2 Abth. 127) hat man, wenn man die Reibungswiderstände unberücksichtigt läßt,

$$(Q + p \times l)\, r = P \times R$$

woraus man erhält

$$r = \frac{P \times R}{Q + p \times l} \qquad (\alpha)$$

Da in diesem Ausdruck die Größe l, welche den Abstand des Gewichtes Q von der Welle bezeichnet, sich im Nenner befindet, so nehmen wir daraus ab: daß der Halbmesser der Welle um so kleiner sein muß, je tiefer das Gewicht Q in dem Schacht herabhängt, oder je länger das herabhängende Seil (oder die Kette) ist. Dieser Halbmesser erlangt also seinen größten Werth, wenn die Last bis zu der, durch die Are der Welle gehenden horizontalen Ebene erhoben ist. Um für diesen Fall dessen Größe r_o zu erhalten, setzt man in (α) $l = o$; dann hat man

$$r_o = \frac{P \times R}{Q}$$

Nennen wir r_1 den Halbmesser des Theiles der Welle, von

welchem das Seil (oder die Kette) herabhängt, wenn dieses sich um einen Umgang abgewickelt hat, oder wenn das herabhängende Seilstück gleich $2\pi r_0$ ist, so findet man

$$r_1 = \frac{P \times R}{Q + p \cdot 2\pi \cdot r_0}$$

(wo $\pi = 3,1416$). Wenn die Kette sich abermals um einen Umgang, oder um die Länge $2\pi \cdot r_1$ abwickelt, so ist dann die Länge des herabhängenden Seilstückes

$$2\pi \cdot r_0 + 2\pi \cdot r_1 = 2\pi (r_0 + r_1)$$

und wenn man mit r_2 den Halbmesser des Theils der Welle bezeichnet, von welchem jetzt das Seil (oder die Kette) herabhängt, so sieht man leicht, daß

$$r_2 = \frac{P \times R}{Q + p \cdot 2\pi (r_0 + r_1)}$$

ist. Ebenso erhält man den folgenden Halbmesser

$$r_3 = \frac{P \times R}{Q + p \cdot 2\pi (r_0 + r_1 + r_2)}$$

das Gesetz, nach welchem diese Halbmesser abnehmen, ist nun leicht zu erkennen. Man ersieht aus dem Vorhergehenden, daß in dem Moment, wo das Gewicht Q von dem Grunde des Schachtes erhoben wird, das Seil von demjenigen Theil der Welle herabhängt, welcher den kleinsten Halbmesser r_n hat. Wenn man mit H die Tiefe des Schachtes bezeichnet, so ist augenscheinlich

$$r_n = \frac{P \times R}{Q + p \cdot H}$$

Um den Verlust der Zeit, während des Niedersteigens des unbelasteten Seils (oder der Kette) zu entgegnen, bringt man zuweilen zwei gleiche Seile (oder Ketten) an der Welle an, die sich in entgegen gesetzten Richtungen um dieselbe auf oder abwickeln, so daß, wenn während der Umdrehung der Welle, das eine Seil sich aufwickelt, und also ihr herabhängendes Stück, an welchem die Last — der gefüllte Eimer — hängt, sich verkürzt, das andere sich abwickelt

und folglich ihr herabhängender Theil, woran der leere Eimer hängt, sich verlängert (Fig. 128). Diese Vorrichtung kann dann so angeordnet werden, daß die Summe der beiden herabhängenden Seile (oder Ketten) eine constante Größe, und der Tiefe **H** des Schachtes gleich ist. Nennt man **l** die Länge des einen herabhängenden Seils (oder Kette) welches den gefüllten Eimer trägt und dessen Moment

$$(Q+p.l)\,r$$

ist und $H-l$ die Länge des andern herabhängenden Seils (oder Kette), welches den leeren Eimer trägt und dessen Moment

$$p\,(H-l)\,r$$

ist, so hat man, da letzteres Moment dem Moment der Kraft **P** zu Hülfe kommt,

$$P\times R+p\,(H-l)\,r=(Q+p.l)\,r \qquad (\beta)$$

da bei der Bildung dieser Gleichung angenommen wurde, daß die beiden Halbmesser derjenigen Theile der Welle, von denen die beiden Seilstücke herabhängen (welche in obiger Gleichung durch **r** ausgedrückt sind) für jede bestimmte Lage der Last einander gleich seien, so sind die Gewichte der beiden leeren Eimer in allen Lagen mit einander im Gleichgewicht, und deshalb dieselben in (β) unberücksichtigt geblieben.

Aus (β) erhält man

$$r=\frac{P\times R}{Q-p.H+2p.l} \qquad (\gamma)$$

Man ersieht aus diesem Ausdruck, daß der Halbmesser **r** sich vermindert, wenn die Länge des Seils (oder der Kette), woran der gefüllte Eimer hängt, zunimmt; man erhält daher den größten Halbmesser r_o, wenn man in (β) $l=o$ setzt, dann ist

$$r_o=\frac{P\times R}{Q-p.H}$$

Hingegen den kleinsten Halbmesser r_{n}, wenn man in (β) $l=H$ setzt. Dann ist



$$r_n = \frac{P \times R}{Q + p.H}$$

Wenn man in (γ) nach und nach

$$l = 2\pi . r_0$$
$$= 2\pi . r_0 + 2\pi . r_1 \text{ ꝛc.}$$

setzt, so erhält man wie oben die Werthe für die auf einander folgenden Halbmesser r_1, r_2, r_3 ꝛc. nämlich:

$$r_1 = \frac{P \times R}{Q - p.H + 2p.2\pi r_0}$$

$$r_2 = \frac{P \times R}{Q - p.H + 2p.2\pi (r_0 + r_1)}$$

$$r_3 = \frac{P \times R}{Q - p.H + 2p.2\pi (r_0 + r_1 + r_2)}$$

u. s. w. *)

---

*) Für die meisten Fälle wird es hinreichen, von der Bestimmung der aufeinander folgenden Halbmesser r_1, r_2, r_3 ꝛc. gänzlich Umgang zu nehmen und nur den Größten r_0 und den Kleinsten r_n derselben zu berechnen und diese als die Halbmesser der Grund- und Deckfläche eines abgestutzten Kegels zu betrachten, um welchen sich das Seil (oder die Kette) auf- und abwickelt. Die Länge desselben kann dann annäherungsweise auf folgende Weise bestimmt werden. Bezeichnet man mit n die Zahl der Umwindungen des Seils um den abgestutzten Kegel, für den Fall, wenn die ganze Länge desselben aufgewickelt ist, und h die Differenz der beiden Halbmesser r_0 und r_n, so sind die mittlern Halbmesser der auf einander folgenden Seilringe durch

$$r_n + \frac{h}{n}; \quad r_n + \frac{2h}{n}; \quad r_n + \frac{3h}{n}; \ldots\ldots r_n + \frac{nh}{n}$$

ausgedrückt. Ist daher das Seil gänzlich abgewickelt und hängt vertikal in den Schacht herab, so ist es augenscheinlich, daß die Summe aller der Peripherien, deren Halbmesser $r_n + \frac{h}{n}$;

Die Welle ist, wie aus den vorstehenden Entwicklungen hervorgeht, aus zwei gleichen, symetrischen, ausge-

---

$r + \frac{2h}{n}$ rc. sind, der ganzen Länge des Seils oder der Tiefe H des Schachtes beinahe gleich sind. Man hat also

$$H = 2\pi\left(r_n + \frac{h}{n}\right) + 2\pi\left(r_n + \frac{h}{n}\right) + \ldots + 2\pi\left(r_n + \frac{nh}{n}\right)$$

oder

$$H = 2\pi\left[nr_n + \frac{h}{n}\left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right)\right]$$

Nun ist die Summe der Zahlen $1 + 2 + 3 + \ldots + n$
$= \frac{n(n+1)}{2}$

folglich

$$\frac{H}{2\pi} = nr_n + \frac{h}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= nr_n + \frac{hn}{2} + \frac{h}{2}$$

und hieraus

$$n = \frac{\frac{H}{\pi} - h}{2r_n + h}$$

Wenn d die Dicke des Seils bezeichnet, so findet man nun die Länge des abgestutzten Kegels auf folgende Weise sehr leicht. Es bezeichnen ab (Fig. 129) die Seite des abgestutzten Kegels und cd dessen Länge, so ist

$$ab = n \times d$$

und da $bg = h$ und $ag = cd$ so ist

$$cd = \sqrt{n^2 \cdot d^2 - h^2}$$

Die in vorstehender Entwicklung enthaltenen Halbmesser r_0 r_n bezeichnen den Abstand der Mitte des Seils von der Axe der Welle oder des abgestutzten Kegels; die wirklichen Halbmesser ac und bd derselben erhält man daher, wenn man von r_0 und r_n die halbe Dicke des Seils abzieht. Dem gemäß ist

$$bd = r_0 - \frac{d}{2} \text{ und } ac = r_n - \frac{d}{2}.$$

bauchten Theilen zusammengesetzt, um welche sich abwechselnd die beiden Seile (oder Ketten) auf- und abwickeln. Die Fig. 128 stellt die mit den beiden Seilen vereinigte Welle dar. Es ist in dieser Figur leicht wahrzunehmen, daß die Befestigungspunkte der beiden Seile (oder Ketten) an den Stellen der Welle sich befinden müssen, die den kleinsten Durchmesser haben, wenn sich das Seil (oder die Kette) aufwickelt; hingegen an denjenigen, die den größten Durchmesser haben, wenn sich das Seil (oder die Kette) abwickelt. Demgemäß werden die Abstände der beiden Seile (oder Ketten) von der Axe der Welle dem größten Durchmesser der beiden symetrischen Ausbauchungen gleich sein, wenn der beladene Eimer an dem obersten Punkte des Schachtes angelangt ist und der leere Eimer sich am Grunde desselben befindet; wird nun dieser gefüllt und jener entleert, so müssen vor dem Wiederbeginne der Bewegung die Befestigungspunkte der Seile (oder Ketten) an denjenigen Stellen der Welle, die den kleinsten Durchmesser haben, sich befinden. Man muß daher nach jedem Wechsel, d. h. nach dem ein gefüllter Eimer am obern Theile des Schachtes angelangt und entleert worden ist, die Befestigungspunkte der beiden Ketten verwechseln, zu welchem Zwecke an den beiden Ausbauchungen AB und A′B der Welle bei a und b, so wie bei a′ und b′ Haken oder Hakenräder befestigt sind, in welche abwechselnd die Seile (oder Ketten) eingehängt werden*).

*) Dieses fortwährende Verändern der Aufhängpunkte der Seile (oder der Ketten) ist mit mancherlei Nachtheilen verbunden, es consumirt einen Theil der Arbeitszeit und kann sogar für die am Grunde des Schachtes befindlichen Arbeiter gefährlich werden, wenn dieses Verhängen der Seile (oder Ketten) nicht mit der gehörigen Sorgfalt und Vorsicht geschieht. Folgende Anordnung mit fixen Aufhängpunkten der Seile (oder Ketten) verdient daher vor der oben Betrachteten den Vorzug.

Die beiden Seile (oder Ketten) sind an den Stellen a und b Fig. 130 der beiden Ausbauchungen der Welle angehängt,

Noch einfacher kann man den, aus dem sich verändernden Gewicht der herabhängenden Seile (oder Ketten) entstehenden ungleichförmigen Widerstand reguliren, indem man statt der einfachen Seile, ein **Seil ohne Ende**, das mehreremale um einen Cylinder (Fig. 131) gewickelt ist, anwendet, an welchem die beiden, zur Förderung der Last dienenden, Eimer befestigt sind. In diesem Falle sind die von

---

welche den kleinsten Durchmesser haben. Befindet sich also der gefüllte Eimer A am obern Theile des Schachtes, so ist das Seil (oder die Kette) woran derselbe hängt, gänzlich aufgewickelt, dagegen ist das Andere, welches den leeren Eimer B trägt, abgewickelt und hängt in dem Schachte herab. Für irgend eine Stellung beider Eimer ist daher die Summe beider, in den Schacht herabhängenden Seile nicht constant, und die Momente der Gewichte der Eimer sind ebenfalls veränderlich, weshalb diese in die Rechnung mit eingeführt werden müssen.

Bezeichnet r_0 den größten Halbmesser der Ausbauchung der Welle,

r_n . . kleinsten . . . .
U das Gewicht eines Eimers
Q Die zu fördernde Last
P Die Kraft
R Den Hebelarm, woran sie wirkt
H Die Tiefe des Schachtes und
p das Gewicht der Längeneinheit des Seils (oder der Kette)

so ist für den Fall, wenn sich der belastete Eimer am Grunde des Schachtes (ohne jedoch denselben zu berühren) und der leere Eimer am obern Theile desselben befindet

$$P \times R + Ur_0 = (Q + U + p \,.\, H)\, r_n \qquad (\alpha)$$

befindet sich hingegen der belastete Eimer am obern Theile des Schachtes und der leere Eimer am Grunde desselben, so hat man

$$P \times R + p\,(H + U)\, r_n = (Q + U)\, r_0 \qquad (\beta)$$

der Welle herabhängenden und unter sich verbundenen Seilstücke, so wie die an denselben befestigten Eimer fortwährend unter sich im Gleichgewicht, und der Halbmesser der Welle

---

Aus (α) und (β) erhält man durch Addition

$$2P \times R = (r_0 + r_n) Q$$

und hieraus

$$r_0 = \frac{2PR}{Q} - r_n \qquad (\gamma)$$

setzt man diesen Werth in (β) so erhält man

$$r_n = \frac{P \, . \, R}{Q} \cdot \frac{Q + 2U}{Q + 2U + p \, . \, H} \qquad (\delta)$$

und durch Substitution dieses Ausdruckes in (γ)

$$r_0 = \frac{P \, . \, R}{Q} \cdot \frac{Q + 2U + 2p \, . \, H}{Q + 2U + p \, . \, H} \qquad (\varepsilon)$$

Man könnte nun auch für die verschiedenen, zwischen r_0 und r_n, liegenden Halbmesser r_1, r_2 rc. Ausdrücke entwickeln, allein für die meisten Fälle wird man ausreichen, wenn man, wie bereits oben angegeben, der Welle die Form zweier mit einander verbundener, abgestutzter Kegel giebt, deren kleinste und größte Halbmesser (bis in die Mitte des um die Welle gewickelten Seils gemessen) durch r_n in (δ) und r_0 in (ε) ausgedrückt sind. Die Länge dieser Kegel kann nach dem in der Anmerkung (Seite 107) enthaltenen Ausdruck bestimmt werden.

Ist z. B. $P = 120$ ℔; $Q = 200$ ℔; $U = 30$ ℔
$R = 1{,}5$ Fuß; $H = 150$ Fuß; $d = 0{,}1$ Fuß
und $p = 0{,}5$ ℔

so ist $r_n = 0{,}699$; $r_0 = 1{,}101$
daher (Fig. 128) $ac = 0{,}599$ Fuß, $bd = 1{,}001$ Fuß
ferner

$$h = 0{,}402 \text{ Fuß}; \; n = 26{,}31$$

folglich die Länge eines der abgestutzten Kegel $= 2{,}6$ Fuß oder die ganze Länge der Welle $= 5{,}2$ Fuß und dieselbe muß sich beiläufig $26\frac{1}{3}$ mal umdrehen, bis der gefüllte Eimer vom Grunde des Schachtes an der Oeffnung derselben anlangt.

eine constante Größe, die erhalten wird, wenn man den Moment der Kraft durch das absolute Gewicht der zu erhebenden Last dividirt. Diese Vorrichtung hat jedoch den Nachtheil, daß wenn der Schacht sehr tief ist, sehr lange Seile (oder Ketten) erforderlich sind, wodurch sich die Kosten für die Herstellung derselben beträchtlich erhöhen.

Die Schnecken der Uhren sind auf ähnliche Weise, wie die in Vorhergehehenden betrachteten kegelförmigen Wellen oder Trommeln angeordnet. Das eine Ende einer spiralförmig gewundenen Feder ist an einem hervorragenden Theil der Welle **L** (Fig. 132) und das andere Ende an der innern cylindrischen Fläche des Federgehäuses **A**, welches sich frei um jene drehen kann, befestigt. Eine Kette ist auf der äussern cylindrischen Fläche des Federgehäuses eingehakt und zum Theil auf diese, zum Theil auf die Schnecke **C** aufgewickelt, welche mit der Welle **M** und dem Sperrrad **N** fest vereinigt ist und sich mit Beiden zugleich dreht. Auf der Welle **M** ist unterhalb des Sperrrades ein Zahnrad aufgezogen, das mit dem übrigen Räderwerk in Verbindung steht und bei a einen, in das Sperrrad **N** eingreifenden Sperrkegel trägt. Da die Schnecke **C** die Form einer kegelförmigen Spirale hat, so wickelt sich, wenn die Welle **M** herumgedreht wird, die Kette auf die Schnecke, wodurch das Federgehäuse um seine Welle gedreht und die Feder angespannt wird. Wenn hernach diese Vorrichtung sich selbst überlassen bleibt, so wird in Folge der Spannung der Feder sich das Federgehäuse **A** in der Richtung des Pfeils drehen und mittelst der Kette die Wirkung auf die Schnecke **C** und durch diese auf das Rad übertragen. Wie nun die Feder sich mehr und mehr abspannt, nimmt ihre Wirkung **F** ab, dagegen wächst der Hebelarm **r** der Schnecke **C** in demselben Verhältniß, so daß das Product $F \times r$ immer eine constante Größe ist.

Wir übergehen mit Stillschweigen die Regulateure, deren Zweck ist, die Wirkung der bewegenden Kraft, oder die des Widerstandes je nach den verschiedenen Dispositionen

der Maschinen zu reguliren und nehmen dagegen den Centrifugal-Regulateur, (das in der That als ein Universal-Regulateur zu betrachten ist,) in Nachfolgendem in specielle Untersuchung.

42. **Centrifugal-Regulateur.** — Ein mit der Welle **CC** (Fig. 133) fest verbundenes Rad **AB** wird durch die Maschine in Bewegung gesetzt. **DI** ist ein, um das Gelenke **D** drehbarer Stab, der an seinem Ende **I** eine metallene Kugel **P** trägt und ausserdem mit einem Arm **DH** fest vereinigt ist, dessen umgebogenes Ende **H** in die rinnenförmige Vertiefung der auf der Welle **CC** gleitenden Muffe **E** eingreift. Wenn das Rad **AB** rotirt, so wird die Centrifugalkraft die Kugel **P** um so mehr von der Vertikalen **mn** entfernen, je größer die Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades ist, dadurch wird mittelst des mit **DI** verbundenen Armes **DH** die Muffe **E** herabgehoben und da diese auf einen andern um die Axe **G** beweglichen Hebel **GF** wirkt, so wird durch dessen Bewegung entweder die Oeffnung einer Schütze verkleinert oder ein Ventil geschlossen, oder eine Bremse angespannt und dadurch die Wirkung der bewegenden Kraft vermindert, sobald die Geschwindigkeit die vorgeschriebenen Grenzen überschreitet. Wenn im Gegentheil der Gang der Maschine nachläßt, so nähert sich die Kugel **P** wieder der Vertikalen **mn**, dadurch erhebt sich die Muffe **E**, so wie der Hebelarm **GF** ein wenig und die Oeffnung der Schütze oder des Ventils vergrößert sich, oder die Bremse wird abgespannt, und die Wirkung der Kraft nimmt wieder zu.

Solches ist der Hergang von dem Spiel des Centrifugal-Regulateurs **PDH**. Gewöhnlich ist derselbe aus Stäben, die eine verschiebbare Raute **ABCD** (Fig. 134) bilden und die mittelst einer ihrer Ecken mit einer durch die Maschine in Bewegung gesetzten vertikalen Welle **CH** vereinigt ist, zusammengesetzt. Die Verlängerungen der obern Stäbe **CD** und **CD** tragen an ihren untern Enden gleich schwere metallene Kugeln **P** und **P′** und an den

untern Winkel der Raute hängt eine auf der Welle **CH** verschiebbare Muffe **A.** Die Wirkung der Centrifugalkraft auf die beiden Kugeln verursacht also, daß die Muffe mehr oder weniger in die Höhe geschoben wird, welche dann diese Bewegung einem Hebel **FG** mittheilt, mittelst dessen die vorhandene disponible Kraft in der Art geregelt wird, daß er die Oeffnung einer Schütze oder eines Hahnes verändert.

Die Einrichtung eines Centrifugal-Regulateurs hängt von zwei wesentlichen Bedingungen ab:

a. daß die Muffe **A** eine bestimmte Lage behalte, während die Maschine eine vorgeschriebene Anzahl von Umgängen in einer gegebenen Zeit vollbringt, und

b. daß, wenn die Geschwindigkeit der Maschine eine im Voraus, durch die Natur der zu verrichtenden Arbeit, bestimmte Vergrößerung erwirbt, die Centrifugalkraft der Kugeln im Stande sei, die Oeffnung der Schütze oder des Hahnes, wodurch die Wirkung der bewegenden Kraft modirirt wird, zu regeln.

a. Erste Bedingung. Um die folgenden Entwicklungen zu vereinfachen, bezeichnen wir die gegenseitigen Lagen der einzelnen Theile (der Stäbe) des Centrifugal-Regulateurs durch bloße Linien. Wenn also die Maschine die entsprechende Geschwindigkeit besitzt, so muß die Muffe **A** (Fig. **135**) eine unveränderliche Lage auf der vertikalen Axe behalten; dem gemäß darf sie von keinem der Theile, durch die sie mit der Schütze oder dem Hahne in Verbindung steht, eine Einwirkung erleiden, und damit die Gewichte der Kugeln, so wie die Centrifugalkraft derselben, ebenfalls keine Einwirkung auf sie ausüben, müssen diese während der Umdrehungen der Welle unter sich im Gleichgewichte sein. Dasselbe kann aber nur bestehen, wenn die Richtung der Resultirenden von dem Gewichte einer jeden Kugel und ihrer Centrifugalkraft mit der Richtung des Stabes **CI** zusammenfällt, oder durch den festen Punkt **C** geht. Da nun die Wirkung von dem Gewichte **P** jeder der beiden

Kugeln vertikal abwärts und parallel mit der Axe CA und die der Centrifugalkraft nach der Richtung der Horizontalen KI statt findet, so kann man die Größe ihrer Resultirenden durch die Linie CI ausdrücken, in welchem Falle dann die Seite CK des Dreiecks CKI dem Gewichte P der einen Kugel, und die Seite KI der Centrifugalkraft F derselben proportional sein wird.

Man hat also $P : F = CK : KI$

oder

$$\frac{F}{P} = \frac{KI}{CK} \qquad (\alpha)$$

Man weiß ausserdem (2 Abth. 68), daß die Centrifugalkraft eines Körpers, dessen Dimensionen in Vergleichung mit seinem Abstand von dem Centrum, um welches er sich dreht, klein sind (und dies ist hier der Fall mit jeder der Kugeln P und P′ in Vergleichung zu ihrem Abstand IK von der Axe CK) der lebendigen Kraft dieses Körpers, dividirt durch den Halbmesser des Kreises, welchen sein Schwerpunkt beschreibt, gleich ist. Nennt man also ψ die Winkelgeschwindigkeit des Gewichtes P in Bezug auf die Axe CK, wenn die Maschine die entsprechende Geschwindigkeit besitzt, so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes einer Kugel

$$\psi \times KI$$

die lebendige Kraft derselben

$$\frac{P}{g} \times \psi^2 \times (KI)^2 \quad \text{(2 Abth. 60);}$$

dividirt man diese Kraft durch den Halbmesser KI, so stellt der Quotient

$$\frac{P}{g} \times \psi^2 \times KI$$

die Centrifugalkraft F der Kugel P dar. Substituiren wir diesen für F gefundenen Werth in (α), so erhalten wir

$$\frac{\psi^2}{g} = \frac{1}{CK}$$

und hieraus

$$CK = \frac{g}{\psi^2} \qquad (\beta)$$

Man weiß, daß die Winkelgeschwindigkeit ψ, oder der Weg, welchen ein um die Einheit von der Axe abstehender Punkt um dieselbe während einer Sekunde beschreibt, dadurch ausgedrückt wird, daß man 2π (wo $\pi = 3,1416$) mit der Zahl n der Umdrehungen des Regulateurs in einer Minute (bei entsprechendem Gange der Maschine) multiplicirt und dieses Produkt durch 60 dividirt. Demgemäß ist also:

$$\psi = \frac{2\pi \, . \, n}{60} = \frac{\pi \, . \, n}{30}$$

Da g bekannt ist, so hat man

$$CK = \frac{30^2 . \, g}{\pi^2 . \, n^2} = 91,104 \, . \, \frac{g}{n^2} \qquad (\gamma)$$

Giebt man den Seiten der Raute eine entsprechende Größe und dem untern Scheitel A derselben, oder der Muffe eine durch die Beschaffenheit der bewegenden Kraft bestimmte Lage, so daß die Schütze oder der Hahn so weit geöffnet ist, daß alle schädlichen und nützlichen Widerstände der Maschine, die sich mit einer, mit ψ correspondirenden Geschwindigkeit bewegt, bezwungen werden, so ist dadurch der Abstand der Kugeln von der Axe gänzlich bestimmt und folglich auch die Lage derselben auf der Verlängerung der Stäbe CB und CD. Denn durch die Lage derselben ist auch der Winkel BCA gegeben; zieht man daher durch den Punkt K eine Perpendikulaire zur Axe, so begegnet diese den Stäben in den Punkten I und I', welches die Mittelpunkte der Kugeln sind. Man kann eine noch einfachere Regel zur Bestimmung von CK auf folgende Weise ableiten. Bezeichnet man mit t die Zeitdauer eines Umgangs des Regulateurs, wenn die Maschine mit der geforderten Geschwindigkeit sich bewegt, so ist es augenscheinlich, daß 2π den Weg bezeichnet, welchen ein um die Einheit von der Axe abstehender Punkt um diese beschreibt

und $\frac{2\pi}{t}$ ist der Weg, den derselbe Punkt während der Zeiteinheit durchläuft. Letzterer Ausdruck ist aber auch die Winkelgeschwindigkeit ψ, folglich

$$\psi = \frac{2\pi}{t}.$$

Substituirt man für ψ diesen eben gefundenen Werth in (β), so erhalten wir

$$CK = \frac{g}{\frac{4\pi^2}{t^2}} = \frac{gt^2}{4\pi^2}$$

und hieraus

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{CK}{g}}$$

Die (2 Abth. 76) über die Dauer der Schwingungen des einfachen Pendels stattgefundenen Untersuchungen ergaben für ein Pendel, dessen Länge CK ist, die Zeitdauer einer Schwingung gleich $\pi\sqrt{\frac{CK}{g}}$; daraus nehmen wir ab, daß ein Umlauf des Regulateurs die doppelte Zeit gebraucht, in welcher eine Schwingung des einfachen Pendels, dessen Länge dem vertikalen Abstand des Punktes C (Fig. 135) von der durch die Mittelpunkte I und I' der Kugeln gezogenen Geraden gleich ist, stattfindet. Will man also diesen Abstand finden, so wird es hinreichen, eine Bleikugel an einem Faden aufzuhängen und diesen unter seinem Aufhängpunkt nach und nach zu verlängern, bis die Dauer einer Schwingung der Kugel halb so groß, als die gegebene Dauer eines vollständigen Umlaufes des Regulateurs ist. Die Länge des Fadens von der Mitte der Kugel bis zum Aufhängpunkt gemessen, giebt genau die Distanz CK.

b. Zweite Bedingung. Wenn die Geschwindigkeit der Maschine sich vermindert, so ist dies ein Beweis,

daß die Widerstände ein Uebergewicht über die bewegende Kraft besitzen und folglich diese vermehrt werden muß. Die Funktion des Regulateurs ist dann: die Schütze oder den Hahn zu öffnen, damit die mittlere Geschwindigkeit der Maschine wieder hergestellt werde. Wenn im Gegentheil dieselbe sich vermehrt, so besitzt die bewegende Kraft ein Uebergewicht über die gesammten Widerstände und man muß jene vermindern, d. h. durch die Wirkung des Regulateurs muß die Oeffnung der Schütze oder des Hahns verkleinert werden. Es ist augenscheinlich, daß die Muffe diese verschiedenen Wirkungen nicht erzeugen kann, ohne einen gewissen Widerstand zu erleiden, welchen wir mit p bezeichnen wollen. Ist derselbe im Voraus bestimmt, was sehr leicht mittelst des Gewichtes, das zur Bewegung der regulirenden Schütze oder des Hahns erforderlich ist, geschehen kann, so folgern wir aus ihm die Größe des Gewichtes der beiden Kugeln auf nachstehende Weise.

Nehmen wir an, der Widerstand wirke von oben nach unten oder im Sinne des Gewichtes der beiden Kugeln, und es finde z. B. eine geringe Beschleunigung der Geschwindigkeit statt, so werden diese von einander gehen, d. h. der Abstand einer jeden Kugel von der Axe wird sich vergrößern und dadurch die Muffe erhoben werden. Die Wirkung der Kraft p findet genau in der Richtung der vertikalen Axe CA (Fig. 136) statt, und wir können dieselbe durch die Größe irgend einer Linie z. B. durch Aa ausdrücken. Diese Kraft $Aa = p$ läßt sich in zwei andere, einander gleiche Ab und Ad zerlegen, deren Richtungen mit den untern Seiten der Raute ABCD zusammen fallen und in Folge der Steifheit der Stäbe an den Punkten B und D nach den Richtungen $Bb' = Ab$ und $Dd' = Ad$ angebracht betrachtet werden können. Zerlegt man die Kraft Dd′ von Neuem in zwei Andere, deren Eine hD gegen den festen Punkt C gerichtet ist und die Andere Df vertikal abwärts wirkt, so wird die Wirkung der Ersten durch den festen Punkt C vernichtet und die Andere Df ist in Folge der Gleichheit der Dreiecke

wieder gleich Aa oder gleich p. Auf ähnliche Art beweist man für den Punkt B, daß die Kraft Be ebenfalls $= p$ ist. Es wiederholt sich also dieser Widerstand an den beiden Gelenken B und D und behält seinen ursprünglichen Werth bei. Da die drei Punkte C, D und I in einer geraden Linie liegen, so kann man die vertikale Kraft Df oder p in zwei andere parallele Kräfte zerlegen, deren Eine an dem festen Punkte C und die Andere am Mittelpunkte I der Kugel P angebracht ist. Die Wirkung der Erstern wird aber durch den festen Punkt C aufgehoben und bringt mithin keine Bewegung hervor; es bleibt daher nur die Zweite, deren Werth (2 Abth. 20 und 21) nach dem Princip der Zusammensetzung parralleler Kräfte durch $Df \times \frac{CD}{CI}$ oder durch $p \times \frac{a}{b}$ ausgedrückt ist, wenn man $CD = a$ und $CI = b$ setzt, und welcher dem Gewichte P der einen Kugel beizufügen ist. Dieselbe Bewandtniß hat es in Betreff der andern Kugel, deren Gewicht $P' = P$ ist. Dem zu Folge ist dieser Fall auf den erst Betrachteten zurück geführt, d. h. jede Kugel ist der Wirkung der Centrifugalkraft F und einer vertikal abwärts wirkenden Kraft

$$P + p \cdot \frac{a}{b}$$

anstatt der simplen Kraft P unterworfen. Statt der in (α) erhaltenen Gleichung $\frac{F}{P} = \frac{KI}{CK}$ haben wir also hier, wenn für P der so eben gefundene Werth substituirt wird,

$$\frac{F}{P + p \times \frac{a}{b}} = \frac{KI}{CK}$$

Setzt man statt des Ausdrucks F für die Centrifugalkraft ihren von der Winkelgeschwindigkeit ψ abhängigen, oben gefundenen Werth $\frac{P}{g} \times \psi^2 \times KI$, so erhält man:

$$\frac{\frac{P}{g} \times \psi' \times KI}{P + p \cdot \frac{a}{b}} = \frac{KI}{CK}$$

oder, indem man den, beiden Gliedern der Gleichung, gemeinschaftlichen Faktor KI wegläßt und dieselbe mit

$CK \times \left[P \times p\frac{a}{b}\right]$ multiplicirt,

$$\frac{P}{g} \times \psi' \times CK = P + p\frac{a}{b} \qquad (\delta)$$

Da in dieser Gleichung (δ) alle Größen bis auf P gegeben sind, so könnte man mittelst derselben das Gewicht der Kugeln bestimmen, wenn man annehmen dürfte, daß der Regulateur seine Wirkung augenblicklich zu äussern im Stande wäre. Dies ist aber nicht der Fall, indem erst nach Verlauf einer gewissen — übrigens sehr kleinen — Zeit, während welcher sich die Geschwindigkeit vermehrt oder vermindert, die Stäbe, in Folge der Wirkung der Centrifugalkraft oder des Gewichtes der Kugeln, anfangen sich zu verrücken. Wir nehmen also an, die Winkelgeschwindigkeit ψ des Regulateurs sei in diejenige ψ_1 oder ψ_2 übergegangen, wenn durch die Verschiebung der Muffe die Oeffnung der Schütze oder des Hahns ihr Minimum oder ihr Maximum erreicht habe, und setzen

$$\psi_1 = (1 + m)\psi$$
$$\psi_2 = (1 - m)\psi$$

wo $m\psi$ einen Bruchtheil von ψ bezeichnet.

Betrachten wir den ersten Fall, wo die Winkelgeschwindigkeit ψ in diejenige ψ_1 übergeht und

$$\psi_1 = (1 + m)\psi$$

ist, wenn durch die Wirksamkeit des Regulateurs die Oeffnung der Schütze 2c. bis zur bezeichneten Grenze verkleinert worden ist. Es ist augenscheinlich, daß in der Gleichung (δ) statt ψ der Werth $(1 + m)\psi$ substituirt werden muß, um für P den entsprechenden Ausdruck zu erhalten.



Wir haben also, wenn wir in (δ) ψ mit $(1 + m)\psi$ vertauschen und durch P dividiren

$$(1 + m)^2 . \frac{\psi^2 \times CK}{g} = 1 + \frac{p}{P} . \frac{a}{b};$$

da nun nach (β)

$$CK = \frac{g}{\psi^2},$$

und hieraus

$$\frac{CK \times \psi^2}{g} = 1$$

ist, so wird

$$\frac{p}{P} = [(1 + m)^2 - 1] . \frac{b}{a}$$

$$= (2m + m^2) . \frac{b}{a}$$

oder

$$P = \frac{a . p}{(2m + m^2) . b}.$$

Wenn m ein kleiner Bruch ist, so kann man m^2 in Bezug auf m vernachläßigen und man hat dann

$$P = \frac{a . p}{2m . b}. \qquad (\varepsilon)$$

Da $\psi = \frac{\pi . n}{30}$ und $\psi_1 = \frac{\pi . n_1}{30}$ ist, wenn n die Anzahl der Umläufe des Centrifugal-Regulateurs in der Minute für die Winkelgeschwindigkeit ψ und n_1, dessen Umläufe in derselben Zeit für die Winkelgeschwindigkeit ψ_1 bezeichnen, so erhält man, wenn in der Gleichung

$$\psi_1 = (1 + m)\psi$$

jene Werthe für ψ und ψ_1 substituirt werden

$$n_1 = (1 + m) n$$

und aus Beiden

$$m = \frac{\psi_1 - \psi}{\psi} = \frac{n_1 - n}{n}$$

In dem zweiten Falle, wo die Winkelgeschwindigkeit ψ in diejenige ψ_2 übergeht und $\psi_2 = (1 - m)\ \psi$ ist, wenn die Oeffnung der Schütze ꝛc durch die Wirksamkeit des Regulateurs bis zur bezeichneten Grenze vergrößert worden ist, muß die Wirkung von dem Gewichte der beiden Kugeln mit der Wirkung der Centrifugalkraft und dem Widerstand p im Gleichgewicht sein. Betrachten wir zu diesem Zwecke die Fig. 136, so ersehen wir, daß die Kraft p, welche in diesem Falle vertikal aufwärts wirkt, an den Punkt D versetzt, eine vertikale Kraft p giebt, die der Kraft P in I entgegen gesetzt ist. Die in I wirksame Kraft ist daher

$$P - p \cdot \frac{a}{b};$$

man hat also in der Gleichung $\frac{F}{P} = \frac{KI}{CK}$ statt P den Werth

$P - p \cdot \frac{a}{b}$ zu setzen, und da $F = \frac{P}{g} \times \psi^2 \times KI$, so ist:

$$\frac{\frac{P}{g} \cdot \psi^2 \times KI}{P - p \cdot \frac{a}{b}} = \frac{KI}{CK}$$

oder

$$\frac{P}{g} \cdot \psi^2 \times CK = P - p \cdot \frac{a}{b} \qquad (\zeta)$$

In dieser Gleichung (ζ) muß nun, bevor man daraus P entwickelt, ψ mit $(1 - m)\ \psi$ vertauscht werden; geschieht dieses und dividirt man durch P, so erhält man

$$(1 - m)^2 \cdot \frac{\psi^2 \times CK}{g} = 1 - \frac{p}{P} \cdot \frac{a}{b}$$

und da den frühern gemäß

$$\frac{\psi^2 \times CK}{g} = 1$$

ist, so hat man

$$\frac{p}{P} = [1 - (1 - m)^2] \cdot \frac{b}{a}$$

$$= (2m - m^2) \cdot \frac{b}{a}$$

oder $$P = \frac{a \cdot p}{(2m - m^2) \cdot b}$$

Wenn, wie oben, m ein kleiner Bruch ist, so kann m^2 in Bezug auf m vernachläßigt werden und man hat daher

$$P = \frac{a \cdot p}{2m \cdot b}$$

wie in (α)

Um die Verhältnisse für den Hebel, wodurch die Schütze oder der Hahn regulirt wird, zu erlangen, müssen wir zuvor die Größe des Weges bestimmen, welchen die Muffe zwischen den beiden stattfindenden Grenz-Winkelgeschwindigkeiten ψ_1 und ψ_2 durchläuft. Zu diesem Zwecke setze man (Fig. 135) CD = DA = a (A bezeichnet hier den Ort der Muffe, wenn die Maschine die entsprechende Geschwindigkeit besitzt) CI = b und CA = 2Cm = h, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CDm und CIK

$$Cm : CK = a : b$$

also

$$Cm = \frac{a \times CK}{b}$$

und da CK nach (β) gleich $\frac{g}{\psi^2}$, so ist

$$Cm = \frac{ag}{b\psi^2}$$

folglich

$$h = \frac{2ag}{b\psi^2}$$

oder statt ψ dessen Werth $\frac{\pi \cdot n}{30}$ gesetzt

$$h = 182{,}38 \; \frac{a \cdot g}{b \cdot n^2}$$

Setzt man nun für die Winkelgeschwindigkeit

ψ_2 die Höhe $CA = h_2$

ψ_1 . . . . $= h_1$

so findet man auf gleiche Weise, wie so eben h erhalten wurde

$$h_1 = \frac{2ag}{b\psi_1^2} \; ; \; h_{//} = \frac{2ag}{b\psi_2^2}$$

da nun $\psi_1 = (1 + m)\psi$

und $\psi_2 = (1 - m)\psi$

so ist

$$h_1 = \frac{2ag}{b\,(1 + m)^2\,\psi^2} = \frac{h}{(1 + m)^2}$$

$$h_2 = \frac{2ag}{b\,(1 - m)^2\,\psi^2} = \frac{h}{(1 - m)^2}$$

$h_2 - h_1$ ist aber augenscheinlich der Weg, welchen wir zu bestimmen suchen; bezeichnen wir diesen mit W, so ist

$$W = h_2 - h_1 = \frac{4m \cdot h}{(1 - m^2)^2}$$

Wenn m ein kleiner Bruch ist, so kann man m^2 in Bezug auf 1 vernachläßigen, und man hat dann

$$W = 4m \cdot h = \frac{8m \cdot a \cdot g}{b \cdot \psi^2}$$

In Betreff der technischen Anordnung des Centrifugal-Regulateurs ergeben sich aus der so eben stattgefundenen Betrachtung desselben folgende Regeln:



I. Die beiden Kugeln dürfen in ihrer tiefsten Lage den mit der Muffe verbundenen Hebel, durch welchen der Schütze oder dem Hahne die Bewegung mitgetheilt wird und der in der Regel eine horizontale Lage hat, nicht berühren.

II. Ebenso dürfen diese Kugeln in der eben bezeichneten Lage auch die beiden mit der Muffe vereinigten Stäbe CD und CB nicht streifen, weswegen diejenigen, woran die Kugeln befestigt sind, niemals einen kleinern Winkel als etwa 20° bis 30° mit der Axe des Regulateurs einschließen sollen, wenn die Winkelgeschwindigkeit desselben ihr Minimum erreicht hat, oder gleich ψ_2 geworden ist.

III. Der Halbmesser der Kugeln soll nie merklich grösser als etwa 4 pariser Zoll genommen werden, in welchem Falle dann das Gewicht derselben beiläufig 75 — 80 pariser Pfund, insofern sie aus Gußeisen angefertigt sind, betragen wird.

IV. Wenn die zum Verschieben der Muffe erforderliche Kraft beträchtlich und daher CD in Vergleichung mit Cl klein ist, wird man die Muffe nicht unterhalb des Punktes C, sondern oberhalb desselben anbringen, wie es Fig. 137 zeigt*).

*) Um nun die Anwendung der in diesen Paragraphen entwickelten Ausdrücke zu zeigen, nehmen wir als Beispiel einen Centrifugal-Regulateur, der bei mittlerer Geschwindigkeit 40 Umgänge in einer Minute machen soll; wächst die Geschwindigkeit bis zu 42 Umläufen per Minute, so vermindert sich die Oeffnung der Schütze oder des Hahnes bis zu der bezeichneten Grenze; nimmt dieselbe aber bis zu 38 Umgängen per Minute ab, so hat die Größe der Oeffnung ihr Maximum erreicht. Wenn wir für dieses Beispiel Oestreichisches Maaß und Gewicht zu Grunde legen, und man setzt a = 1 Fuß und p = 12 ℔

so ist $g = 31{,}03$; $\psi = 4{,}189$

$\psi_1 = 4{,}398$; $\psi_2 = 3{,}979$

Wenn die Schütze die Kraft eines Mannes zum Erheben erfordert, so erkennt man leicht, daß die Centrifugalkraft nicht

---

$$\text{und } m = \frac{n_{,} - n}{n} = \frac{42 - 40}{40} = \frac{1}{20}$$

Ferner ist für den tiefsten Stand der Kugeln oder für die Winkelgeschwindigkeit ψ_1

$$CK = \frac{g}{\psi_1^2} = \frac{31{,}03}{4{,}189^2} = 1{,}96 \text{ Fuß}.$$

Sollen nun in dieser Lage die Mittelpunkte der Kugeln um $\frac{1}{3} \times CK$ von der Axe CA abstehen, so ist die Länge CI oder

$$b = \sqrt{1{,}96^2 + \tfrac{1}{6} \cdot 1{,}96^2} = 2{,}07 \text{ Fuß}$$

und das Gewicht einer Kugel oder

$$P = \frac{1 \cdot 12}{2 \cdot \frac{1}{20} \cdot 2{,}07} = 57{,}97 \text{ ℔}.$$

Der Weg, welchen die Muffe längst der Axe des Regulateurs durchläuft, während die Winkelgeschwindigkeit ψ_2 sich in diejenige ψ_1 umwandelt, ist

$$W = \frac{8 \cdot \frac{1}{20} \cdot 1 \cdot 31{,}03}{2{,}07 \cdot 4{,}189^2} = 0{,}341 \text{ Fuß}$$

oder 4,09 Zoll, wornach die Verhältnisse des Hebels, welcher die Schütze öffnet und schließt, zu bestimmen sind. Würde man diesen Weg durch den Unterschied zwischen den Abständen der Muffe von C für die kleinste und größte Geschwindigkeit des Regulateurs bestimmen, so erhielte man

für 38 Umgänge p. Minute IK = 1,96
„ 42 . . . . . . = 1,60

deren Differenz also = 0,36 ist. Der Fehler, der durch die Vernachläßigung der Größe m^2 in der Gleichung $w = \frac{4mb}{(1 - m^2)^2}$ entsteht, beträgt also 0,36 — 0,341 = 0,019 Fuß oder beiläufig $\frac{1}{4}$ Zoll, d. h. die Muffe hat bereits den Weg von 0,341 Fuß durchlaufen, wenn der Regulateur 41,8 Umgänge p. Minute macht, wie man leicht findet, wenn man in $IK = \frac{g}{\psi^2}$, IK = 1,96 — 0,431 = 1,619 setzt und den Werth von ψ bestimmt.

Ist die Kraft p beträchtlich, dagegen der Weg, welchen die Muffe auf der Axe des Regulateurs durchläuft, nicht groß,



hinreicht, sie zu bewegen. In diesem Falle wird diese Kraft

so verhindern dann die beiden Kugeln das Anbringen des durch die Muffe zu bewegenden Hebels. In diesem Falle ist es, wie bereits oben erwähnt wurde, zweckmäßiger, die Raute oberhalb des Drehpunktes C (Fig. 137) anzubringen und die Stäbe CI und CD so anzuordnen, daß sie zusammen ein solides Stück bilden und die Form eines Winkelhebels haben. Wirkt dann an dem Punkt A die Kraft p abwärts, so kann man sie in zwei Andere zerlegen, deren Richtungen mit CB u. CD parallel laufen; werden diese an die Punkte B u. D versetzt und daselbst abermals so zerlegt, daß das eine Paar der neuen Kräfte mit CB und CD zusammenfällt, und das andere Paar derselben mit der Axe AC parallel läuft, so werden jene durch den Widerstand des festen Punktes C vernichtet und diese wirken an den Punkten B und D vertikal abwärts, und den obigen Entwicklungen gemäß ist die Intensität von Jeder = p. Im vorliegenden Falle wirkt daher die aus dem Gewicht der einen Kugel entspringende Kraft P an dem Hebelarm IH = D, die Centrifugalkraft F derselben an dem Hebelarm CK und die eine Kraft p an dem Hebelarm Dd = d; F und p wirken zusammen in demselben, dagegen die Kraft P im entgegengesetzten Sinne; man hat daher für den Gleichgewichtszustand dieser gesammten wirksamen Kräfte

$$F \times CK + pd = PD;$$

wird für F der oben gefundene Werth substituirt, so hat man:

$$\frac{P}{g} \cdot \psi^2 \times D \times CK + pd = PD$$

Wenn die Kugeln die niedrigste Stelle einnehmen d. h. wenn die Winkelgeschwindigkeit = ψ_2 und folglich die Schütze oder der Hahn gänzlich geöffnet ist, dann geht in vorstehender Gleichung ψ in ψ_2 über, man muß also in derselben ψ mit $\psi_2 = (1 - m)\psi$ vertauschen, wodurch man

$$P(1 - m)^2 \cdot D \cdot \frac{\psi^2 \times CK}{g} + p \cdot d = PD$$

erhält; da aber $\frac{\psi^2 \times CK}{g} = 1$

so ist

einzig dazu verwendet, die Muffe A zu verschieben, durch welche dann der Hebel AL (Fig. 138) und durch diesen

---

$$[1 - (1 - m)^2]\ P = \frac{p \cdot d}{D}$$

und hieraus

$$P = \frac{p \cdot d}{D \cdot (2m - m^2)}$$

wenn m ein kleiner Bruch ist, so kann m^2 in Bezug auf m vernachläßigt werden und man hat

$$P = \frac{p \cdot d}{2m \cdot D}$$

Man ersieht aus dieser Gleichung, daß das Gewicht P der Kugeln von den Größen d und D abhängig ist, und daß dasselbe um so größer sein muß, je weiter der Punkt D der Raute ABCD von der Axe des Regulateurs entfernt ist, oder je näher die Mittelpunkte der Kugeln, wenn sich diese in ihren tiefsten Lagen befinden, derselben liegen.

Haben nun für einen bestimmten Fall die Größen φ, φ_1, φ_2, IK, CK und CI dieselben Werthe, wie im ersten Beispiele, dagegen sei p = 24 ℔ und W = 1 Zoll und die Anordnung des Regulateurs soll in der Art statt finden, daß für die mittlere Winkelgeschwindigkeit φ der Stab CD (oder CB Fig. 137) mit der Axe einen Winkel von 45° Grad bilde, so ist dann

$$d = \frac{1}{2} h \text{ und } h = \frac{w}{4m} = \frac{\frac{1}{12}}{4 \cdot \frac{1}{20}} = 0{,}417 \text{ Fuß}$$

$$\text{Da nun IK} = D = \frac{1{,}96}{3} = 0{,}653 \text{ Fuß}$$

so ist

$$CD = a = \sqrt{2 \times (0{,}208)^2} = 0{,}294 \text{ Fuß}$$

$$\text{und} \quad P = \frac{24 \cdot 0{,}208}{2 \cdot \frac{1}{20} \cdot 0{,}653} = 76{,}44 \text{ ℔}$$

eine zweite, mit doppelten Klauen versehene Muffe L, die zwischen den beiden auf der Welle EF aufgezogenen losen Kegelrädern N und N′ (Fig. 139). angebracht ist, in Bewegung gesetzt wird. Die Welle EF wird dann unmittelbar durch die Maschine selbst bewegt, und da durch die Wirkung des Regulateurs die Muffe L bald mit dem einen, bald mit dem andern losen Rade eingerückt wird, und diese im Eingriff mit dem dritten, auf der Welle QR befestigten Rade P sich befinden, dasselbe aber so angeordnet ist, daß es, je nachdem sich dessen Welle in dem einen oder im entgegengesetzten Sinne dreht, die Schütze entweder öffnet, oder schließt, so wird durch das abwechselnde Aus- und Einrücken der Muffe L der Gang der Maschine regulirt. Besitzt nämlich die Maschine die mittlere, dem Zweck der zu leistenden Arbeit entsprechende Geschwindigkeit, so hat die Muffe L eine solche Stellung auf der Welle EF, daß sie sich mit keinem der beiden losen Kegelräder N und N′ in Verbindung befindet; die Welle EF dreht sich, ohne jene mit herum zu nehmen, das Rad P befindet sich daher in Ruhe, und die Größe der Oeffnung der Schütze verändert sich nicht. Wie sich aber die Geschwindigkeit beschleunigt, so wird die Muffe L durch die Wirkung der Centrifugalkraft der Kugeln in das Rad N eingerückt und dieses bewegt sich von diesem Augenblick an mit der Welle EF, folglich auch das Rad P, und die Oeffnung der Schütze beginnt, sich in Folge der Bewegung desselben — nicht in Folge der Wirkung der Centrifugalkraft der Kugeln — zu verkleinern. Wenn hingegen die Geschwindigkeit sich vermindert, so wird die Muffe L in das Rad N′ eingerückt und das damit im Eingriffe sich befindende Rad P dreht sich nun in entgegengesetzter Richtung, und die Oeffnung der Schütze wird von dem Augenblicke an, wo diese Bewegung begann, sich vergrößern. Diese übrigens sehr sinnreiche Vorrichtung erfüllt indessen nicht ganz ihren Zweck, weil sich in vielen Fällen die Wirkung der Centrifugalkraft der Kugeln nicht schnell genug durch die Veränderung in der Bewegung der Schütze äussert, indem die Verminderung der Geschwindigkeit durch

den Widerstand oder die Vermehrung derselben durch die Kraft einen viel zu großen Zeitraum erfordert. Es verfließt also immer eine gewisse Zeit von dem Augenblick an, wo die Ursache der Beschleunigung anfängt, sich zu äußern bis zu dem, wo der Regulateur beginnt, dieselbe zu beseitigen. Das Mangelhafte des Centrifugal-Regulateurs besteht also darin: daß er nicht im Stande ist, die Wirkung der bewegenden Kraft augenblicklich zu vermehren oder zu vermindern, wenn irgend eine Ursache die bestehende vortheilhafteste Geschwindigkeit der Maschine zu stören sucht.

43. Momentan wirkende Regulateure mit Federn. — Unter den Mitteln, welche man zur augenblicklichen Regulirung der Wirkung einer Maschine anwenden könnte, ist Eines, das wir hier vorschlagen, das uns einfach zu sein scheint und ausserdem noch verschiedene wesentliche Vortheile in sich vereinigt.

Nehmen wir an, die Welle **AB** (Fig. 140), an welcher die bewegende Kraft wirkt und wodurch die Bewegung auf irgend einen Mechanismus, z. B. auf den einer Spinnerei ꝛc. übertragen wird, sei in **C** und **C'** unterbrochen, so daß sich die Bewegung von dem einen Theil derselben auf den Andern, mittelst der beiden mit ihnen fest verbundenen Kurbeln, deren Warzen **E** und **F** durch eine um sie bewegliche und zu **CE** senkrechte Leitstange **EF** vereinigt sind, überträgt. Wenn man jetzt die eine Kurbel **CE** wegnimmt und dieselbe durch eine cylindrische Trommel ersetzt, in welcher eine Spiralfeder eingeschlossen ist, deren eines Ende an dem Umfange der Welle **AC** und das andere Ende an der innern Fläche der Trommel — wie bei den Federgehäusen der Uhren — (Fig. 141) befestigt ist, und die sich frei um ihre Welle drehen kann, so ist es augenscheinlich, daß die, auf der Seitenfläche der Trommel befestigte Warze **E**, vermöge der mit ihr vereinigten Lenkstange **EF** mit einer Kraft zieht, die erforderlich ist, um den Widerstand der Welle **AC** zu bezwingen; dadurch wird aber die Spiralfeder angespannt, das Gehäuse derselben dreht

sich mehr oder weniger um seine Axe, und der Winkel, welchen dasselbe beschreibt, wird die Größe der im Punkte e ausgeübten Kraft messen, weil in demselben die Leitstange EF senkrecht zu dem Halbmesser CE ist. Denkt man sich nun an der Welle einen Zeiger ab befestigt, dessen Spitze an einer, auf der Seitenfläche der Trommel angebrachten, Theilung die Größe des Winkels, um welchen jene sich gedreht hat, anzeigt, so dient derselbe dazu, die jedesmalige Spannung der Spiralfeder oder die Wirkung des Widerstandes anzugeben und bildet somit mit den übrigen Theilen zusammen einen neuen Dynamometer, welchen man nach Belieben mehr oder weniger empfindlich machen kann.

Nichts ist nun leichter, als die Bewegung der Trommel um ihre Welle auf eine Muffe g (Fig. 142) überzutragen, deren innere Fläche ein eingeschnittenes Schraubengewinde (eine Schraubenmutter) enthält, die auf einem Theil der Welle CA angebracht ist, welche eine Schraube mit mehr oder weniger steilen Gängen bildet und in die erwähnte Schraubenmutter hineinpaßt. IK ist ein auf der Seitenfläche der Trommel befestigter und über dieselbe hervorragender Stab, der durch das Auge (oder die Oeffnung) o eines zweiten, mit der Muffe fest verbundenen, Stabes of hindurch geht. So wie nun der Widerstand der Maschine vermehrt oder vermindert wird, schiebt sich die Muffe auf der Welle in Folge der relativen Bewegung der Trommel um ihre Welle vor- oder rückwärts, setzt den Hebel fm, welcher in Verbindung mit der Schütze oder dem Hahne steht, in Bewegung, und öffnet oder schließt diese mehr oder weniger. Kennt man das Verhältniß der bewegenden Kraft zu dem Widerstand oder der nützlichen Wirkung, die man mittelst des Operateurs erzeugen will, so kann man dadurch die Bewegung der Muffe oder der Schütze und zwar in der Art regeln, daß fortwährend Gleichgewicht zwischen der bewegenden Kraft und den Widerständen stattfindet, ohngeachtet der Veränderungen, die Letztere abwechselnd erleiden. Dieser Regulateur mit der Spiralfeder ist jedoch nur bei solchen Maschi-

nen mit Vortheil anwendbar, wo die von der Welle A auf diejenige B überzutragende Kraft nicht sehr beträchtlich ist. Wenn hingegen diese Kraft bedeutend ist, so wird es zweckmäßiger sein, den Regulateur auf folgende Weise anzuordnen. A und A′ (Fig. 143) sind zwei getrennte, jedoch in derselben Richtung angebrachte Wellen, in welcher die Wirkung der bewegenden Kraft fortgepflanzt werden soll; ihre beiden einander zugekehrten Ende liegen in den Zapfenlagern hg und h′g′, und an dem vorspringenden Halse der Welle A ist eine Scheibe C befestigt, die auf ihrer Seitenfläche mit gleichweit von der Axe entfernten und in gleichen Abständen von einander befindlichen Zapfen b versehen ist; in dem cylinderförmigen Halse der andern Welle A′ sind gerade, biegsame, stählerne Schienen oder Federn aa′ in der Richtung des Halbmessers des Halses befestigt, deren äusserste Ende a sich gegen die Zapfen b der Scheibe C′ stemmen. Durch diese Anordnung der Zapfen und der Federn wird die rotirende Bewegung der einen Welle auf die Andere übertragen, indem entweder durch die Zapfen b die Federn aa′ oder umgekehrt jene durch diese mit herum genommen werden, je nachdem die bewegende Kraft an der Welle A oder A′ applicirt ist.

B und B′ sind zwei gleichgroße, auf den Wellen A und A′ befestigte Zahnräder, beide haben dieselbe Anzahl Zähne und greifen in die Getriebe F und F′, deren Durchmesser einander gleich sind, ein; das eine Getriebe F bildet mit der, mit einer rinnenförmigen Vertiefung versehenen Muffe G einen einzigen Körper, in dessen cylindrischer Aushöhlung ein Schrauben-Muttergewinde eingeschnitten ist, und das Andere F′ ist mit der, in den Zapfenlagern k, k′ sich drehenden und in das eben erwähnte Muttergewinde hineinpassenden Schraubenspindel DD′ fest vereinigt. Es ist klar, daß, wenn sich jetzt beide Wellen A und A′ mit gleicher Winkelgeschwindigkeit drehen, die mit der Muffe vereinigte Schraubenmutter sich weder vor- noch rückwärts auf der Schraubenspindel DD′ schiebt, sondern an derselben Stelle verbleibt.

Wenn sich aber beide Wellen A und A′ mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, so wird das Getriebe F längst der Schraubenspindel DD′ sich um eine Größe verschieben, die von der Größe der Biegung der Federn, wodurch beide Wellen vereinigt sind, abhängt, und diese Verschiebung wird genau dem Winkel, um welchen sich beide Wellen A und A′ verdrehen, proportional sein. Da nun in der rinnenförmigen Vertiefung der Muffe G das Ende des Hebels innen liegt, welcher der Schütze die Bewegung in der Art mittheilt, daß dieselbe herabgelassen wird, wenn sich die Biegung der Federn vermehrt, hingegen hinaufgezogen wird, wenn sich diese vermindert, so sieht man, daß diese Vorrichtung die Funktion eines Regulateurs durchaus erfüllt und die Größe, um welche die Schütze durch die Wirkung derselben sich erhebt oder senkt, genau im Verhältniß mit den Biegungen der Federn — diesseits der Grenze genommen, bei welcher die Elasticität derselben alterirt wird — steht.

Statt der gezähnten Räder B und B′ und der Getriebe F und F′ kann man auch einfache Rollen, die mittelst Riemen ohne Ende die Bewegung auf einander übertragen, anwenden; damit man diesen Riemen die entsprechende Spannung geben kann, und die schiefe Richtung des um die Rollen B und F geschlungenen Riemens, durch die Verschiebung der Rolle F nicht zu groß werde und abgleite, giebt man der Welle DD′ eine solche Lage, daß ein ziemlich beträchtlicher Raum sich zwischen den beiden Axen AA′ und DD′ befindet.

Nimmt man nun an, daß durch die Wirkung der bewegenden Kraft P sämmtliche Federn aa′ an den Punkten, wo sie die Zapfen b berühren, einen Druck gleich P′ hervorbringen, wenn der durch den Operateur entstehende Widerstand ein Minimum und gleich Q′ ist, hingegen jener Druck = P″ wird, wenn dieser Widerstand ein Maximum und gleich Q″ ist: so ist es augenscheinlich, daß, wenn n Federn angebracht sind, in dem ersten Falle jede derselben an ihrem äussersten Ende der Einwirkung einer Kraft $\frac{P'}{n}$ unterworfen ist, wodurch sie um die Größe f ge-

bogen wird, und im zweiten Fall einer Kraft $\frac{P''}{n}$, welche die Biegung f' erzeugt, und der Wirksamkeit der Kräfte gemäß f' größer als f ist. Daher ist f' — f die in Rechnung zu bringende Biegung der Federn, welche stattfindet, wenn der Widerstand Q' in denjenigen Q'' übergeht. Bezeichnet für dieselbe Veränderung des Widerstandes, φ den Winkel, um welchen sich beide Wellen A und A' verdrehen, so wie a die Länge einer Feder und b den Halbmesser des Wellenhalses, worin diese befestigt sind, so ist

$$\varphi (a + b) = f' - f$$

und hieraus

$$\varphi = \frac{f' - f}{a + b}$$

Ferner bezeichne R den Halbmesser der Räder B und B'
r . . . . Getriebe F und F'
h die Steigung der Schraube DD' und
w den Weg, welchen die Muffe auf der Schraubenspindel durchläuft, während die Wellen A und A' sich um den Winkel φ verdrehen. Denkt man sich nun die Fläche eines Schraubenganges bis zu dem, das Getriebe F bildenden Cylinder, dessen Halbmesser = r ist, ausgedehnt und den Mantel desselben abgewickelt, so erhält man ein Dreieck ABC (Fig. 144), in welchem BC = h und AB = $2\pi r$ (π = 3,1416..) ist. In Fig. 145 stelle α das Rad B und β das Getriebe F dar, so ist Ca = R; c'a = r und ab = φR der Weg, um welchen sich das Rad B in Bezug auf das Rad B' verdreht; bezeichnet jetzt ad den Weg, um welchen sich in Folge der Biegung der Federn das Getriebe F verdreht, so muß

$$ad = \varphi R$$

sein. Drückt nun in dem Dreieck ABC (Fig. 144) Am den Bogen ad (Fig. 145) und mn (Fig. 144) den Weg, um welchen sich die Muffe verschiebt, aus, so ist

$$Am : AB = mn : CB$$

oder $\varphi R : 2\pi r = W : h$

hieraus

$$W = \frac{\varphi h R}{2\pi r}$$

oder, wenn man für φ seinen oben gefundenen Werth substituirt

$$w = \frac{h \cdot R (f' - f)}{2\pi \cdot r (a + b)}$$

Man ersieht also hieraus, daß die Muffe einen um so größern Weg durchlaufen wird, je größer der Halbmesser des Rades **B**, die Steigung der Schraube und die Differenz der Biegung der Federn, und je kleiner der Halbmesser des Getriebes **F** ist.

Die Größe $f' - f$ wird man am kürzesten durch Versuche erhalten, ausserdem kann sie auch durch Rechnung bestimmt werden, wie weiter unten bei der Betrachtung des Widerstandes der Materialien gezeigt werden soll, und wo man zugleich das Verfahren angeben wird, wie die Dimensionen der Federn für den Fall zu bestimmen sind, damit dieselben durch die Wirkung der Kraft $\frac{P'}{n}$ nicht über die Grenze ihrer Elasticität gespannt werden.

Zu erwähnen ist hier noch, daß die so eben betrachteten Feder-Regulateure, so wie der Centrifugal-Regulateur mit einem Schwungrad in Verbindung stehen müssen, um durch die Wirkung derselben die periodischen Schwingungen, die durch die Federn der Erstern erzeugt werden, so wie die momentanen Veränderungen des Letztern zu modificiren.

V.

Von den Kurbeln oder Krummzapfen.

A.

Die einfachen Krummzapfen.

44. Betrachtung der Weise, wie das Element der Arbeit des einfachen Krummzapfens während des ersten halben Umgangs desselben sich verändert. Soll man eine continuirliche Kreisbewegung in eine geradlinige Wechselseitige, oder selbst in eine Kreisförmige Wechselseitige, umwandeln, so ist, wie wir bereits (3 Abth. 25 und 26) gesehen haben, die Kurbel oder der Krummzapfen das geeignetste Mittel, in so fern die an der Maschine wirksame Kraft sehr intensiv ist; wenn hingegen an der Stelle, wo die fragliche Umänderung der Bewegung vorgenommen werden soll, die wirkende Kraft nicht groß ist, so kann man statt des Krummzapfens die excentrische Scheibe anwenden, wobei man aber das in (3 Abth. 25) Gesagte zu berücksichtigen hat. Da bei einer übrigens constanten Kraft, die durch den Krummzapfen erzeugte Wirkung in jedem folgenden Augenblick eine Andere als in dem Vorhergehenden ist, so ist es nützlich, das Gesetz dieser Veränderung zu studiren, weil wir dadurch zu dem Prinzip, welches die Anwendung des Schwungrades bedingt, hingeleitet werden.

Eine Kurbel oder ein Krummzapfen besteht, wie man weiß, aus einem mit dem Halse einer Welle AE (Fig. 146)

fest verbundenen Arme oder Knie **AB**, an dessen Ende ein senkrecht auf der Seitenfläche stehender Zapfen — die Warze — angebracht ist, auf welche mittelst einer Lenkstange oder Stelze **BF**, eine, mit wechselseitiger Bewegung begabte Kraft wirkt. Gewöhnlich ordnet man sie so an, daß die Richtung der Lenkstange vertikal ist und diese Richtung sehr wenig varirt oder einen sehr kleinen Winkel mit der durch die Axe der Welle gehenden Vertikalen bildet, wenn der Arm des Krummzapfens sich nahe in einer horizontalen Lage befindet und daher die, durch Zerlegung der an ihr wirksamen Kraft, erhaltene horizontale Seitenkraft einen sehr kleinen Werth hat und nur sehr wenig Reibung erzeugt. Dieser Bedingung wird hinreichend entsprochen, wenn die Lenkstange vier- oder fünfmal so lang als der Arm **AB** des Krummzapfens genommen wird. Die Betrachtung der, durch diese Vorrichtung zu leistenden Arbeit wird sehr erleichtert, wenn wir die Richtung der Lenkstange und der an ihr wirksamen Kraft als unveränderlich annehmen, z. B. daß dieselbe fortwährend vertikal und die Kraft zugleich constant sei. Dies vorausgesetzt, suchen wir nun das Element der Arbeit zu bestimmen, welches die Kraft **P** erzeugt, während die Warze **B**, oder der Angriffspunkt jener den sehr kleinen Bogen **BB'** beschreibt. Es ist augenscheinlich, daß (2 Abth. 146. **d**) diese Arbeit durch das Produkt aus der Kraft in dem sehr kleinen, von ihr durchlaufenen, (auf ihrer Richtung projicirten) Weg gemessen wird. Wenn man durch den Punkt **B'** (Fig. **147**) die Horizontale **B' B''** zieht, so ist diese senkrecht zu der Richtung **BF** der Kraft **P** und **BB''** ist die Projektion des Wegs **BB'** auf der Richtung dieser Kraft; daher $P \times BB''$ das Maaß von einem Element der Arbeit der Lenkstange; da aber **BB''** gleich **bb'**, weil **bb'** und **BB''** zwischen zwei Parallelen enthalten sind, also **bb'** ebenfalls die Projektion von **BB'** auf **AE** darstellt und **BB'** parallel mit **AE** ist, so ist dieselbe Arbeit auch durch $P \times bb'$ ausgedrückt. Sucht man jetzt alle die während eines endlichen Zeit-Intervalls erzeugten Elemente der

Arbeit, z. B. die zwischen den Punkten E und B begriffenen und faßt dieselben in eine Summe zusammen, so drückt diese die gesammte in demselben Zeit-Intervall producirte Arbeit aus. Man bemerkt nun leicht, daß in dieser Summe die constante Kraft P mit der Summe der auf dem Durchmesser EG projicirten sehr kleinen Bögen BB′ ꝛc. d. h. mit der Projektion Eb des von der Warze durchlaufenen Bogens BE multiplicirt ist. Im Allgemeinen genommen hat die Arbeit der Lenkstange für irgend einen von der Warze durchlaufenen Bogen das Produkt: aus der Projektion dieses Bogens auf den vertikalen Durchmesser in die an der Lenkstange wirksame Kraft, zum Werthe. Wenn daher diese Kraft während eines halben Umgangs ECG des Krummzapfens thätig war, so wird die während der Dauer dieser Bewegung erzeugte Arbeit durch die Kraft P multiplicirt mit dem Durchmesser EG oder durch 2r . P gemessen, wo r die Länge des Armes des Krummzapfens bezeichnet. Wir sehen jetzt auch, wie sich das, durch $P \times BB''$ ausgedrückte Element der Arbeit für sehr kleine Bögen BB′ in jedem Augenblick verändert. In Betreff dieser Wirkung bemerken wir, daß, wenn man von dem Angriffspunkt B eine Perpendikuläre BD zu dem horizontalen Durchmesser AC zieht, man das Dreieck ABD erhält, welches dem Dreieck BB′B″ ähnlich ist; daher hat man die Proportion

$$BB'' : BB' = AD : AB$$

und diese giebt

$$BB'' = \frac{BB'}{AB} \times AD.$$

Nennt man s das Bogenelement BB′, so findet man, da $AB = r$ ist

$$BB'' = \frac{s}{r} \times AD.$$

Die in einem Augenblick (oder in einem Zeitelement) geleistete Arbeit ist also

$$P \cdot \frac{s}{r} \times AD \qquad (\alpha)$$

Wenn wir nun den Halbkreis **GCE** in eine Folge sehr kleiner Bögen, alle gleich s, getheilt denken und von den Theilpunkten Senkrechte zu dem horizontalen Halbmesser **AC** ziehen, so wird der Abstand des Fußpunktes einer jeden Senkrechten von der Axe des Krummzapfens (oder des Mittelpunktes des durch ihn beschriebenen Kreises) oder die Linie **AD** der, während der Bewegung durch jeden der kleinen Bögen s, erzeugten Arbeit proportional sein. Denn in dem Ausdruck (α) sind **P**, s und r constante Größen, und es ist nur **AD** veränderlich. Wenn sich der Mittelpunkt der Warze in **E** befindet, so ist die Länge **AD** = o und deswegen ist die in diesem Augenblick geleistete Arbeit der Lenkstange ebenfalls gleich Null; setzt sich von diesem Punkt aus die Bewegung des Krummzapfens bis zum horizontalen Durchmesser **AC** fort, so wächst die Linie **AD**, bis sie zuletzt gleich r geworden ist. Der Werth des Elementes der Arbeit hat dann sein Maximum erreicht und er ist dann

$$P \times \frac{s}{r} \cdot r = P \cdot s$$

Für die Bewegung durch den Bogen **CG** nimmt die Linie **AD** wieder ab und wird in dem tiefsten Punkt **G** abermals gleich Null. Der Werth der in einem Element der Zeit geleisteten Arbeit geht durch alle diese Veränderungen von $P \times s$ bis o durch, und man ersieht hieraus, wie beträchtlich diese Werthe von einander abweichen, wenn einmal die Warze des Krummzapfens dem Punkte **C** und das anderemal dem Punkte **E** näher steht.

Suchen wir jetzt die Größe der Distanz **AX**, die wir mit x bezeichnen wollen, oder vielmehr den Halbmesser eines Rades zu bestimmen, an dessen Peripherie die Kraft **P** tangential wirkt und während einer halben Umdrehung dieselbe Arbeit wie am Krummzapfen erzeugt. Wir haben bereits für die Arbeit am Letztern den Ausdruck $2r \cdot P$ ge-

funden; in Betreff der Erstern ist es augenscheinlich, daß sie gleich $\pi x . P$, weil πx das Maaß der halben Peripherie des Rades für den Halbmesser gleich x ist und dieselbe wirklich auf den aufeinander folgenden Richtungen der fortwährend an ihr tangential wirkenden Kraft P beschrieben ist. Man hat folglich

$$2r . P = \pi x . P$$

oder

$$x = \frac{2r}{\pi} = \frac{2r}{3 . 1416} = 0,637 . r$$

Diese Länge x, welche man den **mittlern Hebelarm** des Krummzapfens nennt, ist also ohngefähr $\frac{2}{3}$ von dem Arm des Krummzapfens. Wenn wir uns erinnern, daß die in einem Elemente der Zeit geleistete Arbeit der Lenkstange durch

$$P . \frac{s}{r} \times AD$$

und die an dem mittlern Hebelarm durch

$$P . \frac{s}{r} 0,637 . r = 0,637 . s . P$$

ausgedrückt ist, so erkennt man ohne Mühe, daß der erste Ausdruck dem veränderlichen Moment $P \times AD$ und der Zweite dem mittlern Moment $0,637 . r . P$ proportional und dieses ausserdem noch constant ist. Die in Bezug auf den Krummzapfen auszuführende Rechnung ist daher einer Vereinfachung fähig, weil man ohne merklichen Fehler, denselben durch ein Rad, dessen Halbmesser gleich $0,637 . r$ ist, und an dessen Peripherie die Kraft P fortwährend tangential wirkt, ersetzen kann. Daraus, daß die größte, in dem Element der Zeit, geleistete Arbeit der Lenkstange dem Ausdruck $r . P$, ihre Kleinste der Null und ihre Mittlere dem Ausdruck $0,637 . r . P$ proportional ist, schließt man: daß, wenn man die Erstere mit 1 bezeichnet, die Zweite gleich 0 und die Dritte gleich 0,637 ist. Der Unterschied zwischen der größten und der mittlern Arbeit ist also $1 - 0,637 = 0,363$ und zwischen der Kleinsten und der Mittlern

$= 0,637$. Die Abweichung der größten und kleinsten Arbeit von der Mittlern wird also durch die beiden Zahlen 0,363 und 0,637 ausgedrückt, wobei das Maaß der größten in dem Elemente der Zeit geleisteten Arbeit als Einheit angenommen ist.

45. Betrachtung der Weise, wie die in dem Element der Zeit geleistete Arbeit des Krummzapfens während des zweiten halben Umgangs desselben sich verändert. — Im Vorhergehenden haben wir nur den Hergang der Bewegung des Krummzapfens während des ersten halben Umgangs betrachtet; jetzt wollen wir sehen, was sich für Resultate ergeben, wenn er den andern halben Umgang EHG (Fig. 147) vollendet. Es kann nur einer der drei folgenden Fälle stattfinden.

I. Die Kraft P wirkt während dieser andern halben Umdrehung gar nicht,

II. sie wirkt in einer Richtung, die derjenigen während der ersten halben Umdrehung statt gefundenen entgegen gesetzt ist und endlich

III. sie fährt fort, in der ursprünglichen Richtung zu wirken.

In dem ersten Falle, welcher seine Anwendung bei den einfach wirkenden Pumpenkolben, bei den mit Fußtritten verbundenen Kurbeln 2c. findet, ist die totale Arbeit der Kraft P gleich $2r \cdot P$; wirkt hingegen diese Kraft während einer ganzen Umdrehung an dem mittlern Hebelarm, so ist ihre Arbeit gleich $2\pi \cdot x \cdot P$. Man hat also

$$2\pi \cdot x \cdot P = 2r \cdot P$$

oder

$$x = \frac{r}{\pi} = 0,318 \cdot r.$$

Die während eines Zeitelements geleistete Arbeit ist immer dem Ausdruck $r \cdot P$ proportional, und die Kleinste gleich 0, während die Mittlere durch $0,318 \cdot r \cdot P$ ausgedrückt ist.

Hier ist also der Unterschied zwischen der größten und mittlern Arbeit 1 — 0,318 = 0,682 und zwischen der Kleinsten und Mittlern 0,318. Die Abweichung der größten Arbeit von der Mittlern ist also in diesem Falle beträchtlicher als in dem in §. 44 Betrachteten.

In dem zweiten Falle, wo die Kraft P ihre Richtung nach jeder statt gefundenen halben Umdrehung in die Entgegengesetzte verändert und also immer in demselben Sinne, wie die Drehung stattfindet, wirkt, entwickelt dieselbe während einer ganzen Umdrehung eine Arbeit, die gleich $4r \cdot P$ ist. Man hat also

$$4r \cdot P = 2\pi \cdot x \cdot P$$

oder

$$x = \frac{2r}{\pi} = 0{,}637 \cdot r$$

ganz so wie in dem, in §. 44 betrachteten Falle. Die Abweichungen der größten und kleinsten Arbeit von der Mittlern sind also durch die Zahlen 0,363 und 0,637 repräsentirt. In diesem zweiten Falle ist folglich die größte Abweichung geringer, als in dem Ersten.

In dem dritten Falle wird die ganze geleistete Arbeit der Kraft P während einer ganzen Umdrehung des Krummzapfens durch

$$2r \cdot P - 2r \cdot P = 0$$

und die der Mittlern durch

$$\pi x \cdot P - \pi x \cdot P = 0$$

ausgedrückt; beide sind also gleich Null und die Abweichungen der größten und kleinsten Arbeit von der Mittlern durch 1 und 0 repräsentirt. Dieselben sind also in diesem Falle die größt möglichen.

Dieser letzte Fall kann nur in Hinsicht auf die Wirkung der Schwere statt finden, welche immer in demselben Sinne wirkt und die folglich während der Dauer eines ganzen Umlaufs keine Arbeit erzeugt (3 Abth. 12). Da aber diese Wirkung sich immer mit derjenigen einer andern Kraft,

die in der Richtung der Lenkstange, wie in den vorherbetrachteten Fällen wirkt, vereinigt, so wird es dienlich sein, den Einfluß, welchen sie auf die Ungleichheiten der in den Zeitelementen geleisteten Arbeiten ausübt, zu untersuchen.

46. **Wie das Gewicht des mit dem Krummzapfen vereinigten Maschinen-Geräthes zu regeln ist.** — Nennen wir p das Gewicht der Lenkstange **BF** und des mit ihr vereinigten Maschinen-Geräthes, welches nach der ursprünglichen Richtung der Kraft P auf den Krummzapfen wirkt, und nehmen wir an, diese Kraft sei während eines ganzen Umgangs in Wirksamkeit, d. h. sie wirke in der ersten halben Umdrehung vertikal abwärts und in der zweiten vertikal aufwärts, so wird man beobachten, daß das Gewicht p bald mit der Kraft P gemeinsam, bald dieser entgegen wirkt, also die während einer ganzen Umdrehung durch die Kraft P erzeugte Größe der Arbeit durch das Gewicht p durchaus nicht alterirt wird und daher dessen Einfluß auf die an dem mittlern Hebelarm während einer Rotation hervorgebrachte Arbeit ebenfalls gleich Null ist. Da nun das Element der Arbeit der Kraft immer gleich Null ist, wenn sich die Warze in der vertikalen Linie, in E und G befindet, so ersieht man, daß die Wirkung des Gewichtes p sich darauf reducirt, die in dem Zeitelement geleistete, in den Punkten C und H stattfindende größte Arbeit, dem Ausdrucke r . P proportional zu vermehren oder zu vermindern, je nachdem die Kraft P mit ihr in demselben oder im entgegengesetzten Sinne wirkt.

Es ist nun leicht wahrzunehmen, daß die Abweichungen der in dem Zeitelement und durch die vereinigte Wirkung der beiden Kräfte P und p geleisteten größten Arbeit von der Mittlern derselben in dem Falle, wo die Kraft P während einer ganzen Umdrehung, so wie in demjenigen, wo sie nur während eines halben Umgangs wirkt, beträchtlicher sind, als in den vorher betrachteten Fällen, wo man p = o hatte; daher ist unter solchen Bewandtnissen es wesentlich, das mit dem Krummzapfen vereinigte Maschinengeräthe

in Bezug auf die Axe der Welle ins Gleichgewicht zu setzen. Aber die Sache ist eine ganz andere, wenn die Kraft P nur während des ersten halben Umgangs und in einer dem Gewichte p entgegengesetzten Richtung wirkt. Weil die in dem Zeitelement geleistete Arbeit immer ihren größten Werth hat, wenn der Arm des Krummzapfens eine horizontale Lage hat, so ist also dieselbe für den ersten halben Umgang dem Ausdruck $r\,(P - p)$ und für die zweite demjenigen $r\,.\,p$ proportional. Man wird den Erstern oder Letztern für die Grenze der in dem Zeitelement geleisteten größten Arbeit nehmen, je nachdem $P - p >$ oder $< p$ oder $P >$ oder $< 2p$ ist. Der vortheilhafteste Fall findet augenscheinlich statt, wenn der Werth von p so genommen wird, daß $r\,(P - p) = 2r\,.\,p$, oder daß $p = \frac{P}{2}$ ist, so daß sich die besagte größte Arbeit hier auf die Hälfte reducirt und durch $r\,.\,\frac{P}{2}$ repräsentirt ist. Zur Bestimmung der mittlern Arbeit während des ersten halben Umgangs hat man

$$2r\,(P - p) = \pi x\,.\,P$$

und für diejenige, während des zweiten halben Umgangs

$$2p = \pi x\,.\,P.$$

Beide Gleichungen addirt geben

$$r = \pi x$$

oder

$$x = \frac{r}{\pi} = 0{,}318\,.\,r.$$

Die in einem Zeitelement geleistete mittlere Arbeit ist also $0{,}318\,.\,r\,.\,P$ wie in dem, in §. 45 betrachteten Falle und der Unterschied zwischen der größten und mittlern Arbeit ist $\frac{1}{2} - 0{,}318 = 0{,}182$ und zwischen der kleinsten und mittlern $0{,}318$; diese beiden Zahlen drücken die Abweichungen der größten und der kleinsten Arbeit von der Mittlern aus und sind geringer, als in dem erst betrachteten Falle.

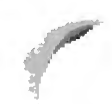


47. Unterschied zwischen einem Krummzapfen von einfacher und Einem von doppelter Wirkung. — Wir wissen aus den vorhergehenden Paragraphen, daß die an der Leitstange eines Krummzapfens applicirte Kraft, bald während der Dauer eines halben Umganges, bald während eines ganzen Umganges wirkt, indem sie in dem letztern Falle in dem Momente des Ueberganges von der einen halben Umdrehung in die Andere ihre Richtung verändert und in die entgegengesetzte umkehrt. Diese beiden Fälle sind wohl von einander zu unterscheiden, und man nennt den Krummzapfen oder die Kurbel, woran die Kraft nur nach einer Richtung oder während einer halben Umdrehung wirkt, *einfachwirkend*, und wenn die Kraft abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen oder während einer ganzen Umdrehung wirkt, *doppelwirkend*. Um eine Idee von der einfach wirkenden Kurbel (oder Krummzapfen) zu erlangen, denke man sich eine von oben nach unten wirkende, bewegende Kraft an einem mit der Warze der Kurbel verbundenen und vertikal herabhängenden Seile applicirt, so wird sie nur während der Bewegung des Kurbelarms durch einen Halbkreis ihre Wirkung auf diesen ausüben können, dagegen während der Bewegung durch den andern Halbkreis wirkungslos seyn; es ist also nöthig, ein Schwungrad mit der Welle der Kurbel zu verbinden, wodurch die Kurbel während der zweiten halben Umdrehung continuirlich getrieben wird. Wenn aber die bewegende Kraft ihre Wirkung anstatt mittelst eines Seiles, durch eine unbiegsame Stange auf die Kurbel überträgt, so kann sie ihre Wirkung auch von unten nach oben äußern, oder mit andern Worten, ihre Wirkung findet dann fortwährend statt, und die Kurbel ist dann eine Doppelwirkende.

B.

Von den zusammengesetzten Krummzapfen.

48. Wirkung der doppelten Krummzapfen und wie dieselben am vortheilhaftesten anzuordnen sind. — Man bringt oft an derselben Axe zwei Krummzapfen in einander entgegengesetzter Richtung an, die um eine auf der Längenrichtung der Axe gegebene Größe von einander abstehen, damit die mit denselben verbundenen Lenkstangen nicht zusammen stoßen und sich in ihrer Bewegung behindern. Befinden sich diese beiden Krummzapfen in ein und derselben, durch die Axe gehenden Ebene, so sind sie nicht geeignet, die Wirkung der nach Größe und Richtung constanten Kraft zu reguliren; man muß deswegen, damit diese Regulirung statt finden könne, dieselben in verschiedenen, durch die Axe gehenden und miteinander einen noch näher zu bestimmenden Winkel einschließenden, Ebenen anbringen. Beide Krummzapfen sind entweder an den beiden Enden A, B einer Welle angebracht (Fig. 148), oder diese ist durch knieförmige Ausbiegungen, die die Stelle der Krummzapfen ersetzen und ihre Funktion ausüben, unterbrochen (Fig. 149); die zwischen denselben befindlichen Theile der Welle ruhen in den, in festen Ständern angebrachten Lagern a, b, c und der Raum zwischen ihnen dient zum Spiel der beiden Lenkstangen F, E. Die Projektion dieser beiden Anordnungen auf einer zur Axe senkrechten Ebene stellt die Fig. 150 dar, in welcher die beiden Arme AB, AB′ den Winkel BAB′ einschließen; eine solche Verbindung zweier einfachen Krummzapfen nennt man einen doppelten Krummzapfen. Wir wollen nun



sehen, ob es vortheilhaft sei, eine einzige Kraft in zwei andere gleichgroße und parallele Kräfte, die an den Warzen zweier Krummzapfen nach den Richtungen der daran angebrachten Lenkstangen wirken, zu zertheilen. Bezeichnen wir mit P eine jede dieser parallelen Kräfte und nehmen wir an, daß jede nur während eines halben Umgangs in Thätigkeit sei, so ersieht man leicht, daß ihre vereinigte Wirkung fast ebenso unregelmäßig ist, als wenn nur eine doppelt so große Kraft als P an einem eben so großen Arm eines einfach wirkenden Krummzapfens applicirt wäre. Denn denkt man sich die Resultirende 2P in der Mitte I (Fig. 151) der Sehne BB', welche die Mittelpunkte der in derselben Ebene projicirten Warzen vereinigt, angebracht, so haben (ohngeachtet dieselbe an einem Arm AI wirkt, der kleiner als einer der Arme AB oder AB' ist) die Veränderungen in der Leistung der Arbeit dieselben Abweichungen von der Mittlern zum Verhältniß, als wie für einen einfach wirkenden Krummzapfen. In dem Falle also, wo zwei gleiche Kräfte nur während eines halben Umgangs an einem doppelten Krummzapfen wirken, ist die Arbeit nicht regelmäßiger, als diejenige einer Kraft, die den beiden gleichen Kräften zusammengenommen gleich ist und die an einem einfachen Krummzapfen wirkt.

Wenn aber jede der beiden Kräfte P im Auf- und Niedersteigen der Warzen oder der mit ihnen verbundenen Lenkstangen wirkt, oder wenn die beiden vereinigten Krummzapfen doppelwirkend sind, so kann man fragen, welche Neigung den durch die Arme derselben und durch die Axe gehenden Ebenen gegeben werden müsse, damit die Unregelmäßigkeiten so gering wie möglich werden. Bezeichnen die Linien AB, AB' (Fig. 152 a) die Lage der beiden Arme des doppelten Krummzapfens, an welchen die Kräfte sowohl in dem ersten als in dem zweiten halben Umgang wirksam sind, und ist BAB' der von ihnen eingeschlossene constante Winkel, so kann man sich leicht überzeugen, daß die gesammte

in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kräfte P ihre höchste Grenze erreicht, wenn die Sehne, welche die Punkte B und B′ verbindet, entweder eine vertikale Lage, wie in Fig. 152^{b}, oder eine horizontale, wie in Fig. 153, hat; hingegen ihre niedrigste Grenze erlangt, wenn die Arme AB oder AB′ mit der Vertikalen mn zusammenfallen, was in vier verschiedenen Lagen des doppelten Krummzapfens stattfindet. Nennt man nun s das Bogenelement, und r die Länge eines Armes des doppelten Krummzapfens, so wird den frühern gemäß die in dem Zeitelement geleistete Arbeit für die höchste Grenze durch

$$2P \times \frac{s}{r} \times AI \text{ und } 2P \times \frac{s}{r} \times BI$$

ausgedrückt; wir entnehmen aus diesen beiden Ausdrücken, daß der Erstere um so größer wird, je größer AI ist, daß aber mit der Zunahme von AI der Winkel, welchen die Projektionen der beiden Arme oder die durch dieselben und durch die Axe gelegten Ebenen einschließen, abnimmt und daher auch BI immer kleiner und kleiner wird, je mehr AI wächst. Die Abweichungen dieser beiden Grenzen von der in dem Zeitelement geleisteten mittlern Arbeit, — welche übrigens irgend einen Werth haben kann — werden also die möglichst geringsten, wenn AI = BI ist, d. h. wenn die Dreiecke ABI und AIB′ (Fig. 152 u. 153) einander gleich sind und folglich der Winkel BAB′ ein Rechter ist. Man hat alsdann

$$AI = BI = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot r$$

und die höchste Grenze der in dem Zeitelement geleisteten Arbeit ist also durch

$$2P \times \frac{s}{r} \times 0{,}707 \cdot r$$

gegeben.

Für die niedrigste Grenze der in dem Zeitelement geleisteten Arbeit hat man dann, in der Voraussetzung, daß der Winkel BAB′ ein Rechter ist, augenscheinlich den Ausdruck

$$P \times \frac{s}{r} \times r = P . s.$$

Um die in dem Zeitelement geleistete mittlere Arbeit zu erhalten, muß man erwägen, daß die beiden Kräfte während eines ganzen Umganges eine Arbeit, die durch $2P \times 4r$ gegeben ist, entwickeln, und daß ihre Arbeit, wenn sie an der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser gleich x ist, applicirt sind, durch $2P \times 2\pi x$ ausgedrückt ist; man hat also

$$2P \times 2\pi x = 2P \times 4r$$

oder

$$x = \frac{2r}{\pi} = 0{,}636 . r;$$

die in dem Zeitelement geleistete mittlere Arbeit ist also durch

$$2P \times 0{,}636 . r$$

gegeben und die in demselben Zeitintervall geleistete größte, kleinste und mittlere Arbeit folglich durch

$$2P \times 0{,}707 . s; \; P . s \text{ und } 2P \times 0{,}637 . s$$

oder durch die Zahlen

$$1{,}414; \; 1 \text{ und } 1{,}274$$

und wenn man die mittlere Leistung als Einheit annimmt, durch

$$1{,}12; \; 0{,}785 \text{ und } 1$$

ausgedrückt. Die Abweichungen der Größten und der Kleinsten von der Mittlern sind also $1{,}12 - 1 = 0{,}12$ und $1 - 0{,}785 = 0{,}215$, oder beiläufig $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{5}$. Die doppelten Krummzapfen, deren Arme eine solche Lage haben, daß die durch ihre und durch die Axe gelegten Ebenen einen rechten Winkel einschließen, sind also hinsichtlich der Gleimäßigkeit der Bewegung sehr vortheilhaft.

49. Wirkung des dreifachen Krummzapfens und welche Hindernisse sich der Anwendung desselben entgegen setzen. — Wenn die Arme AB, AB′ und AB″ (Fig. 154) eines dreifachen Krummzapfens auf einer zur Axe senkrechten Ebene projicirt sind, in dieser Lage gleiche Winkel einschließen, (d. h. die Peripherie eines aus A beschriebenen Kreises in drei

gleiche Theile theilen) und auf dieselben drei gleiche Kräfte P, jede während der Dauer eines halben Umgangs EBG wirken, so findet man, daß die in einem Zeitelement geleistete Arbeit ihren größten und kleinsten Werth hat, wenn einer der Arme entweder in einer horizontalen oder in einer vertikalen Lage sich befindet. Denn ist ein Arm horizontal, so wirkt entweder eine Kraft an dem Hebelarm $AB = r$ (Fig. 155), oder zwei Kräfte an den Hebelarmen $B'I'$ und $B''I''$; nun ist, da die Winkel $B'AI'$, $B''AI''$ gleich 30° sind, $B'I' = B''I'' = \frac{1}{2}r$, also ist $r \cdot P$ oder $\frac{1}{2}r \cdot P + \frac{1}{2}r \cdot P$ der größte Werth der geleisteten Arbeit. Steht ein Arm vertikal, so kommt die in B (Fig. 156) wirkende Kraft nicht in Betracht und es wirkt entweder an IB' oder IB'' die Kraft P; nun ist, da die Winkel $AB'I$, $AB''I$ gleich 30° sind, $AI = \frac{1}{2}r$, also $IB' = IB'' = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ somit die kleinste geleistete Arbeit $= \frac{r}{2}\sqrt{3} \cdot P = 0{,}866 \cdot r \cdot P$. Die an dem mittlern Halbmesser x geleistete Arbeit ist dann, da nie mehr als zwei Kräfte gleichzeitig während eines halben Umganges wirksam sein können, gleich $\pi x \cdot 2P$ und die totale Leistung an dem Krummzapfen während eines Umganges, gleich $6r \cdot P$, folglich

$$6r \cdot P = \pi x \cdot 2P$$

oder

$$x = \frac{3r}{\pi} = 0{,}955 \cdot r$$

Nimmt man die größte Leistung der Arbeit zur Einheit, so ist $1 - 0{,}955 = 0{,}045 = \frac{1}{22}$ die Abweichung der Größten von der Mittlern, und $0{,}955 - 0{,}866 = 0{,}089 = \frac{1}{11}$ diejenige der Kleinsten von der Mittlern, in der Voraussetzung, daß das mit dem Krummzapfen in Verbindung stehende Maschinengeräthe in Bezug auf die Axe desselben im Gleichgewicht ist. Endlich wenn die Kräfte in den beiden halben Umgängen auf die Arme des Krummzapfens wirken, so findet die in dem Zeitelement geleistete größte und kleinste Arbeit statt, wenn der eine Arm entweder eine

horizontale oder eine vertikale Lage hat. Denn in beiden Fällen sind die drei Kräfte gleichzeitig in Thätigkeit; ist daher der eine Arm horizontal, so wirken jene an den Hebelarmen AB, I'B' und I''B'' (Fig. 155); ist er hingegen vertikal, so kommt die an B (Fig. 156) wirkende Kraft nicht in Betracht und die beiden andern wirken an den Hebelarmen IB', IB''. Die totale Leistung an den Krummzapfen während eines ganzen Umganges ist gleich $4r \cdot 3P$ und diejenige an dem mittlern Hebelarm x gleich $2\pi x \cdot 3P$, folglich

$$4r \cdot 3P = 2\pi x \cdot 3P$$

oder

$$x = \frac{2r}{\pi} = 0{,}637 \cdot r$$

Da nun $I'B' + I''B'' = AB$ (Fig. 155) und $IB' = IB'' = 0{,}866 \cdot r$ (Fig. 156), so ist die in dem Zeitelement geleistete größte, kleinste und mittlere Arbeit durch

$$2r \cdot P;\ 0{,}866r \cdot 2P \text{ und } 0{,}637r \cdot 3P$$

oder durch die Zahlen

$$2;\ 1{,}732 \text{ und } 1{,}91$$

und wenn man die mittlere Leistung zur Einheit annimmt, durch

$$1{,}047;\ 0{,}906 \text{ und } 1$$

ausgedrückt. Die Abweichungen der Größten und der Kleinsten von der Mittlern sind also $1{,}047 - 1 = 0{,}047 = \frac{1}{21}$ und $1 - 0{,}906 = 0{,}094 = \frac{1}{10}$.

Man ersieht somit aus Vorstehendem, daß die Bewegung der doppelwirkenden dreifachen Krummzapfen fast so regulär ist, als wenn die Kräfte tangential an einem Rade wirkten; aber dieselben sind wegen der Schwierigkeit, die Axen der zwischen den Knieen befindlichen cylindrischen Hälse, womit sie in den Lagern liegen und deren Zahl sich auf mindestens vier beläuft, in eine gerade Linie zu bringen, beinahe unausführbar. Man kann jedoch diese Schwierigkeit dadurch beseitigen, daß man die drei Arme des Krummzapfens an zwei getrennten Wellen ab, cd (Fig. 157) anbringt. Die auf denselben befestigten Zahnräder D, D' haben beide gleiche Durchmesser und dieselbe Zahl Zähne und werden durch die beiden ebenfalls gleichgroßen, auf der Hauptwelle EF befestigten

Zahnräder A und B in Bewegung gesetzt. Die drei mit den Wellen fest verbundenen Arme haben die Lage zu einander, wie es in der Seitenprojection M die Linien ap, aq und ar andeuten *).

---

*) So zweckmäßig auf den ersten Anblick diese Anordnung des dreifachen Krummzapfens erscheint, so ergeben sich bei näherer Prüfung derselben doch so mancherlei Uebelstände, die der Techniker zu umgehen trachten muß. Zu diesen gehört hauptsächlich die ungleichförmige Arbeit an der Peripherie des Rades, das nur den einfachen Krummzapfen bf (Fig. 157) in Bewegung zu setzen hat. Der Druck zwischen den Zähnen beider Räder A und D ist während eines Umganges zweimal ein Maximum und zweimal gleich Null und kehrt sich eben so oft in die entgegengesetzte Richtung um. Durch diese Ungleichförmigkeit des Widerstandes findet ein ungleichartiges Abnützen der Zähne und als Folge davon bald ein ungeregelter, stoßender Gang statt, wodurch ein nicht unbeträchtlicher Theil der bewegenden Kraft absorbirt wird. Da die Anfertigung eines einfachen, knieförmig gebogenen Krummzapfens, selbst für die größten Dimensionen keinen Schwierigkeiten unterliegt, so dürfte nachstehend beschriebene Anordnung eines dreifachen Krummzapfens vor der oben Angegebenen in vielen Fällen einen Vorzug behaupten.

ABC (Fig. 158) ist ein einfacher knieförmig gebogener Krummzapfen mit zwei Hälsen a, a′ womit derselbe in den, in den Ständern k, k′ (Fig. 159) befestigten, geschlossenen Lagern liegt, und über welche die Vorsprünge b, b′ hervorragen. An dem einen derselben z. B. an b (Fig. 158) wird ein mit einer Warze versehener Arm Am (Fig. 159) auf die früher angegebene Weise so befestigt, daß eine durch denselben und durch die Axe gehende Ebene, mit dem Knie fcg (Fig. 158) einen Winkel von 120° bildet; auf dem andern Vorsprung b′ wird ein Zahnrad DD′ (Fig. 159) aufgezogen und auf der Seitenfläche desselben eine Warze n so angebracht, daß die durch diese und durch die Axe gelegte Ebene mit dem Arm Am und dem

Knie fc ebenfalls einen Winkel von 120° einschließt. In das Rad DD′ greift ein anderes auf der Hauptwelle befestigtes Zahnrad H ein und trägt somit die Bewegung der Welle EF auf den so gebildeten dreifachen Krummzapfen ABC über. Weil das Rad D auf dem, über das Lager k′ vorspringenden Theil b befestigt ist, so muß deswegen der Hals a′ verhältnißmäßig stärker gemacht werden, als es nöthig wäre, wenn jenes an einer zwischen beiden Lagern k, k′ befindlichen Stelle angebracht wäre; dadurch werden zwar die Reibungswiderstände etwas vergrößert, was aber den andern durch diese einfache Anordnung erreichten Vortheilen nur einen geringen Eintrag thut.

VI.

Theorie und Anordnung der Schwungräder.

50. Allgemeine Betrachtungen über den Zweck und die Funktion der Schwungräder. — Nicht immer ist es möglich, die Arbeit einer bewegenden Kraft oder eines Widerstandes durch die Anwendung eines doppelten oder dreifachen Krummzapfens reguliren zu können. Wenn man daher zur Uebertragung einer bewegenden Kraft des einfachen Krummzapfens sich zu bedienen genöthigt ist, oder eine wechselseitige Bewegung stattfindet, oder die Kraft so wie der Widerstand oder beide zusammen in unterbrochenen Zeiträumen wirken, so müssen die Unregelmäßigkeiten der Bewegung auf andere Weise regulirt werden und das geeignetste Mittel ist dann ohnstreitig das Schwungrad. Dasselbe besteht gewöhnlich aus einem gußeisernen Ring, dessen Querschnitt ein Rechteck, zuweilen auch ein Kreis, oder eine Ellipse ist (Fig. 160) und das mittelst hölzerner oder eiserner Arme mit der, auf der Axe befestigten, Nabe vereinigt wird. Man sucht in der Regel dasselbe auf einer Welle, die eine große Geschwindigkeit besitzt, und ausserdem der bewegenden Kraft so nahe wie möglich, anzubringen. Zuweilen begnügt man sich, metallene Massen von linsenförmiger Form an den äussern Enden der Arme statt eines Ringes zu befestigen; aber wegen der Gefahr, welche diese Anordnung in ihrem Gefolge hat, ist sie verwerflich. Auch wendet man oft zwei Schwung-

räder bei derselben Maschine an, wenn die Wirkungen der bewegenden Kraft, so wie der Widerstände gleichzeitig unregelmäßig sind. In allen Fällen muß man aber das Gewicht des Schwungrades zu vermindern streben und lieber den Durchmesser desselben, wenn es die übrigen Verhältnisse der Maschine gestatten, vergrößern, weil dessen Gewicht die Reibungswiderstände vermehrt und durch dieselben ein größerer Theil der bewegenden Kraft unnützer Weise absorbirt wird.

Die Funktion eines Schwungrades ist im Allgemeinen diese: daß es einen gewissen Theil der Arbeit der bewegenden Kraft, während die Wirkung der letztern diejenige sämmtlicher Widerstände übertrifft, in lebendige Kraft umwandelt und gleichsam in sich anhäuft, und nachher dieselbe wieder in Arbeit umsetzt, wenn die Wirkung der Widerstände größer, als die der bewegenden Kraft geworden ist. Die Anhäufung der lebendigen Kraft in dem Schwungrade hat also allemal eine Vermehrung, und ihre Umsetzung in Arbeit eine Verminderung der Geschwindigkeit desselben zufolge. Aus diesen Eigenschaften des Schwungrades geht hervor, daß man nicht im Stande ist, einen einzigen allgemeinen, für alle Fälle brauchbaren, Ausdruck für die Berechnung der Dimensionen desselben aufzustellen, sondern daß jede besondere Unregelmäßigkeit in der Wirkung der Kräfte und der Widerstände eine andere Anordnung nothwendig macht und man also das Schwungrad eines Walzwerkes nicht auf dieselbe Weise berechnen kann, wie das einer Dampfmaschine ꝛc. Auch würde die Lösung dieses Problems in vielen Fällen sehr verwickelt werden, wenn man dabei auf alle Umstände der Bewegung Rücksicht nehmen und z. B. bei der Verbindung des Schwungrades mit dem Krummzapfen die aus der veränderlichen Richtung der Lenkstange sich ergebenden Abweichungen mit in die Rechnung einführen wollte ꝛc.

Um die lebendige Kraft eines Schwungrades auszudrücken, verweisen wir auf den 67ten Paragraphen der zweiten Abtheilung, aus welchem folgt: daß, wenn Π das Gewicht,

v die Geschwindigkeit der mittlern Peripherie, ψ die Winkelgeschwindigkeit und R den mittlern Halbmesser des Schwungrades bezeichnet, die lebendige Kraft durch

$$\frac{\Pi}{g} \times v^2 \text{ oder } \frac{\Pi}{g} \cdot R^2 \cdot \psi^2$$

ausgedrückt ist.

51. Schwungrad für einen Krummzapfen von einfacher Wirkung. — Wir beginnen mit der Anordnung eines Schwungrades, die am häufigsten bei den Maschinen vorkommt, nemlich mit einer solchen, wo auf den Arm AB (Fig. 161) des Krummzapfens mittelst einer vertikalen Lenkstange eine Kraft P von oben nach unten während des halben Umganges EBG desselben wirkt und dadurch die Welle A, so wie das damit verbundene Rad M, das in ein zweites N, welches den nützlichen Effekt zu bezwingen die Bestimmung hat, eingreift, in rotirende Bewegung versetzt. Wir bezeichnen den an der Peripherie des letztern Rades von oben nach unten stattfindenden Widerstand mit Q und messen denselben durch ein Gewicht, was wir jedoch nicht als ein wirkliches Gewicht, das zu erheben wäre, betrachten und auch keine Rücksicht auf die Trägheit des Rades M nehmen, weil dessen Durchmesser in Vergleichung mit demjenigen des Schwungrades gewöhnlich zu unbedeutend ist und die große Masse des Letztern immer so entfernt wie möglich von der Axe angebracht wird, damit es eine große lebendige Kraft zu erwerben im Stande ist. Dies vorausgesetzt, betrachten wir nun diesen mit dem Rade M verbundenen Krummzapfen in einem gewissen Zustand der Bewegung und berücksichtigen dabei dasjenige, was bereits im 44ten Paragraphen (3 Abth.) gesagt worden, nemlich: daß die an der Lenkstange in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft P veränderlich ist; daß dieselbe von E bis C wächst, von C bis G abnimmt und im Punkte G selbst, so wie auch während des andern halben Umganges GHE gleich Null ist. Die in dem Zeitelement geleistete Arbeit von Q ist aber unfehlbar constant, weil dieser Widerstand selbst

als unveränderlich angenommen ist und fortwährend tangential an der Peripherie des Rades M wirkt. So lange die in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft P diejenige des Widerstandes Q übertrifft, beschleunigt sich die Geschwindigkeit; dies kann aber nicht unbestimmt fort stattfinden, weil mit der Zunahme der Geschwindigkeit die Wirkung der Kraft sich vermindert und es wird daher ein Moment eintreten, wo sie derjenigen des Widerstandes gleich ist. In diesem Augenblick hat die Geschwindigkeit ihren größten Werth, oder ist zu ihrem Maximum gelangt. Die in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft nimmt aber immer noch ab, wird geringer als diejenige des Widerstandes, und von dieser neuen Ungleichheit — das Gegentheil der Erstern — entsteht eine Verzögerung, so daß sich nun die Geschwindigkeit immer mehr und mehr vermindert. Aber da die Arbeit der Kraft nicht unbestimmt fort abnehmen kann, so tritt endlich ein Moment ein, von welchem an sie wieder wächst. Denn man nimmt leicht wahr, daß, so lange sie unter derjenigen des Widerstandes verbleibt, die Verzögerung fort und fort stattfindet, aber in immer geringerem Grade bis zu dem Augenblick, wo die in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft wieder derjenigen des Widerstandes gleich ist. In diesem Moment hört die Geschwindigkeit auf, abzunehmen und hat ihr Minimum erreicht. Ueber diese Grenze hinaus gewinnt die Arbeit der Kraft die Oberhand über diejenige des Widerstandes, die Geschwindigkeit vermehrt sich neuerdings und gelangt endlich wieder zu ihrem Maximum.

Wenn wir jetzt auf der Welle A ein Schwungrad anbringen, das eine große lebendige Kraft zu entwickeln im Stande ist und uns nun in die beiden Epochen versetzt denken, wo die Geschwindigkeit dieser Vorrichtung am größten und am kleinsten ist, so ist leicht wahrzunehmen, daß die lebendige Kraft des Schwungrades in denselben ebenfalls zu- oder abgenommen hat. Da ferner bekannt ist, daß, wenn man die — während der Zeit, welche zwischen den beiden mit dem Maximum und dem Minimum der Geschwindigkeit cor-

respondirenden Epochen verfließt — durch den Widerstand absorbirte Arbeit von derjenigen, die durch die verwendete Kraft erzeugt wird, abzieht, das Doppelte dieses Unterschiedes der in derselben Zeit stattgefundenen Zunahme oder Verminderung der lebendigen Kraft gleich ist: so ist es nicht schwierig, die Relation zwischen diesen Größen herzustellen, weil wir im Stande sind, den Werth der Arbeit der Kraft und des Widerstandes zu berechnen. Untersuchen wir nun, welchen Effekt das Schwungrad erzeugt. Bereits in den vorhergehenden Paragraphen haben wir die lebendige Kraft desselben durch

$$\frac{\Pi}{g} \cdot R^2 \cdot \psi^2$$

ausgedrückt, wenn Π das Gewicht des Ringes, R dessen mittlern Halbmesser und ψ seine Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Letztere Größe ist der Zahl der Umdrehungen, die das Schwungrad in einer bestimmten Zeit vollbringt, proportional und in der Regel voraus bestimmt oder gegeben. Wir ersehen also aus vorstehendem Ausdruck, daß die lebendige Kraft proportional mit dem Gewicht und mit dem Quadrat des Halbmessers wächst; so daß für einen doppelten, dreifachen, nfachen Halbmesser die lebendige Kraft, vier, neun, n^2 mal so groß ist und folglich durch die Vergrößerung des Halbmessers die lebendige Kraft eines Schwungrades beträchtlich vermehrt werden kann*).

---

*) Haben z. B. zwei Schwungräder A und B dasselbe Gewicht Π, aber B macht in derselben Zeit doppelt so viel Umläufe als A und der Halbmesser von B ist ebenfalls doppelt so groß, als derjenige von A, so ist, wenn

r den Halbmesser und ψ die Winkelgeschwindigkeit des Rades A
2r „ „ „ 2ψ „ „ des Rades B

bezeichnen, die lebendige Kraft des Rades A gleich

$$\frac{\Pi}{g} \cdot r^2 \cdot \psi^2$$

Fassen wir nun den Moment, in welchem die Maschine sich bis zu einem gewissen Grade beschleunigt hat und also die Winkelgeschwindigkeit ψ in diejenige $\psi + m\psi$ übergegangen ist, näher ins Auge und bezeichnen die in diesem Augenblick durch das Schwungrad absorbirte lebendige Kraft mit u, so wie die der Winkelgeschwindigkeit ψ Zugehörige mit U, so ist

$$U = \frac{\Pi}{g} \cdot R^2 \cdot \psi^2$$

$$U + u = \frac{\Pi}{g} \cdot R^2 \cdot \psi_1^2 = \frac{\Pi}{g} \cdot R^2 (1 + m^2) \psi^2$$

Wird die erste Gleichung von der zweiten abgezogen, so erhält man

$$u = \frac{\Pi}{g} \cdot R^2 \cdot \psi^2 (2m + m^2)$$

Die Winkelgeschwindigkeit darf bei gut construirten Maschinen nur um eine geringe Größe zu= oder abnehmen, daher ist m ein kleiner Bruch und man kann also m^2 in Bezug auf m vernachläßigen; man erhält folglich

$$m = \frac{ug}{2\psi^2 R^2 \Pi}$$

und ersieht hieraus, daß der Werth von m, von den Größen R und Π abhängt, indem g, u und ψ der Voraussetzung gemäß constant sind, mithin m um so kleiner wird, je grösser R und Π ist. Da aber der Halbmesser eines Schwungrades gewöhnlich schon im Voraus so groß, als es die Um=

---

und diejenige des Rades B gleich

$$\frac{\pi}{g} \cdot 4r^2 \cdot 4\psi^2 = 16 \cdot \frac{\pi}{g} \cdot r^2 \cdot \psi^2$$

d. h. unter den gegebenen Bedingungen ist die lebendige Kraft des zweiten Schwungrades 16mal so groß, als die des Erstern oder mit andern Worten: das zweite Schwungrad braucht nur den 16ten Theil des Gewichtes von dem des ersten zu besitzen, um im Stande zu sein, dieselbe lebendige Kraft zu entwickeln.

stände gestatten, angenommen wird und somit diese Größe **R** ebenfalls als eine Constante zu betrachten ist, so ist es also das Gewicht **Π**, das man zu bestimmen hat, damit die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades eine gewisse, durch die Art der Bewegung der Maschine näher bezeichnete Grenze nicht überschreite.

Unter dem Widerstande **Q** werden wir von hier an nicht nur jenen, welchen das Rad **N** (Fig. 161) entgegensetzt, sondern auch den der Reibung mit begreifen; bezeichnen wir also mit Q^1 den Widerstand des Rades **N**, mit Δ die an der Peripherie des Zapfens **A** statt findende Reibung und mit ϱ und r_1 die Halbmesser des Zapfens und des Rades **M**, so ist in der Folge

$$Q = Q^1 + \frac{\varrho \cdot \Delta}{r_1}.$$

Vorerst hat man nun die Bedingung zu erfüllen, daß am Ende eines jeden Umganges die totale Arbeit der Kraft **P** derjenigen des Widerstandes **Q** gleich sei. Denn wäre die Erstere größer, so würde sich die Geschwindigkeit von einem Umgange zum andern vermehren und die Maschine müßte als eine schlecht regulirte betrachtet werden. Wir haben (3. Abth. 44) gesehen, daß die Arbeit von **P** während des ersten halben Umganges **ECG** durch $P \times EG$ oder $P \cdot 2r$ ausgedrückt ist, und weil die Kraft während des andern halben Umganges **GHE** nicht arbeitet, so ist es augenscheinlich, daß das Produkt $P \times 2r$ die Arbeit der Kraft auch für die Dauer eines ganzen Umganges darstellt. Die Arbeit des Widerstandes **Q**, welcher während eines ganzen Umganges tangential an der Peripherie des Rades **M** wirkt, ist durch $2\pi r_1 \cdot Q$ ausgedrückt; man hat also

$$2r \cdot P = 2\pi r_1 \cdot Q$$

und hieraus

$$Q = \frac{Pr}{\pi r_1} \qquad (\alpha)$$

Dies ist der Werth des Widerstandes, damit die mittlere Bewegung sich fortwährend gleichmäßig erhalte.

Ferner müssen wir nun auch die verschiedenen Lagen des Krummzapfens, für welche die Geschwindigkeit des Schwungrades am größten und am kleinsten ist, bestimmen. Zu diesem Zwecke haben wir uns dessen zu erinnern, was über einen ähnlichen Gegenstand (3 Abth. 44) gesagt worden ist, daß nemlich die in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft **P** in irgend einem Punkte **B** gleich

$$P \times \frac{s}{r} \times AD$$

ist.

Wird die Bewegung der Warze von dem Moment an betrachtet, wo dieselbe sich in **E** befindet, und angenommen, daß sie sich von der Linken zur Rechten bewege, so ist es augenscheinlich, daß in dieser primitiven Lage die in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft gleich Null ist, obgleich der Widerstand sich fortwährend in Thätigkeit befindet; der Krummzapfen dreht sich also, wenn auch die Kraft mit keinem Uebergewicht wirkt, und ihre in dem Zeitelement geleistete Arbeit vermehrt sich von Augenblick zu Augenblick; folglich hört die Geschwindigkeit nicht auf, abzunehmen, bis daß die Warze in einem Punkte **B** angelangt ist, wo die in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft derjenigen des Widerstandes gleich geworden ist. Während nun die Warze den kleinen Bogen $bB = s$ durchläuft, bewegt sich der Angriffspunkt des Widerstandes auf der Peripherie des Rades **M** durch einen Bogen lL, der jenem bB ähnlich ist, so daß man

$$lL : bB \text{ (oder } s) = r_1 : r$$

oder

$$lL = \frac{r_1}{r} \times s \qquad (\beta)$$

hat. Der Punkt **B**, wo die in dem Zeitelement geleisteten Arbeiten der Kraft und des Widerstandes einander gleich

sind, ist überdies derjenige, wo die Geschwindigkeit des Schwungrades aufhört abzunehmen und es wird durch die zwischen diesen beiden Arbeiten stattfindende Relation

$$P \times \frac{s}{r} \times AD = Q \times IL$$

bestimmt. Wird IL durch seinen in (β) gefundenen Werth ersetzt, so hat man

$$P \times \frac{s}{r} \times AD = Q \times \frac{r_1}{r} \cdot s$$

oder

$$P \times AD = Q \times r_1 \qquad (\gamma)$$

und wenn für Q der ihm äquivalente Ausdruck aus (α) substituirt wird, so ist

$$P \times AD = \frac{Pr}{\pi r_1} \times r_1$$

und hieraus

$$AD = \frac{r}{\pi} = 0{,}318 \cdot r.$$

Wenn hernach die Warze den Punkt B verläßt, so übertrifft die in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft diejenige des Widerstandes und die Geschwindigkeit beschleunigt sich, bis von neuem diese beiden Arbeiten einander gleich sind; alsdann hat die Geschwindigkeit des Schwungrades ihr Maximum erreicht. Der Punkt, in welchem dieser Zustand eintritt, muß augenscheinlich unter dem horizontalen Halbmesser AC liegen, weil in demselben die in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft die Größtmöglichste ist und von da an abnehmen muß, um derjenigen des Widerstandes wieder gleich zu werden. Ausserdem erhält man die Lage von dem Punkte B' des Krummzapfens, für welchen die Geschwindigkeit des Schwungrades ein Maximum ist, durch denselben Gang der Rechnung, wie für den Punkt B und für die von ihm zu dem horizontalen Halbmesser AC gezogene Senkrechte B'D denselben Abstand von dem Mit-

telpunkt A, nemlich 0,318 . r, wodurch bewiesen wird, daß die Punkte B und B', für welche die Geschwindigkeit des Schwungrades ein Minimum und Maximum ist, sich auf derselben, zu dem horizontalen Halbmesser AC senkrechten, Sehne BB', die um die Größe 0,318 . r vom Mittelpunkte A absteht, befinden. Hat die Warze den Punkt B' passirt, so wird die in dem Zeitelement geleistete Arbeit der Kraft wieder kleiner, als diejenige des Widerstandes und sie ist während des halben Umganges, wo die Warze durch den Bogen GHE aufwärts steigt, sogar gleich Null, so daß die Geschwindigkeit wieder abnimmt und ihren im Ausgangspunkte besessenen Werth wieder erlangt, wenn jene in E wieder angekommen ist. Mit einem Wort: die Wirkung der Kraft verändert sich bei jedem Umgang auf dieselbe Weise und die Geschwindigkeiten sind für gleiche Lagen oder Stellungen der Warze immer dieselben.

Jetzt sind wir im Stande, aus der Betrachtung der Bewegung während der Dauer eines ganzen Umgangs des Krummzapfens, einen Ausdruck herzuleiten, mittelst dessen das Gewicht des Schwungrades (oder eigentlich des Schwungringes) bestimmt werden kann. Nehmen wir nun an, daß, wenn sich die Warze in dem Punkte B (Fig. 161) befindet, das Schwungrad die kleinste Geschwindigkeit besitze oder ein Minimum sei; hingegen, wenn jene in dem Punkte B' angelangt ist, sei diese Geschwindigkeit am größten oder ein Maximum. Bezeichnet man das Minimum der Geschwindigkeit mit v, das Maximum derselben mit V, so ist die lebendige Kraft des Schwungrades, wenn die Warze sich in B befindet, gleich $\frac{\Pi}{g} . v^2$ und wenn sie in B' ist, gleich $\frac{\Pi}{g} . V^2$; während die Warze den Bogen BCB' durchläuft, ist daher die Zunahme der lebendigen Kraft, welche durch das Schwungrad absorbirt wird, gleich

$$\frac{\Pi}{g} . V^2 - \frac{\Pi}{g} . v^2 = \frac{\Pi}{g} (V^2 - v^2).$$

Von B' an, und während die Warze den Bogen B'GHEB durchläuft, nimmt die lebendige Kraft wieder ab und erlangt in B abermals ihren kleinsten Werth $\frac{\Pi}{g} \cdot v^2$.

Die Arbeit der Kraft, während die Warze den Bogen BCB' durchläuft, ist ausgedrückt durch

$$P \times \text{mit der Sehne } BB'$$

nun ist $BB' = 2BD$ und

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{r^2 - (0{,}318 \cdot r)^2}$$
$$= 0{,}948 \cdot r$$

folglich

$$P \times BB' = 1{,}896 \cdot r \cdot P.$$

Die Arbeit des Widerstandes Q, während derselbe Bogen durch die Warze beschrieben wird, ist

$$Q \times \text{mit dem Bogen } LL'.$$

Da nun

$$\text{Bogen } LL' : \text{Bogen } BCB' = r_1 : r$$

$$\text{also Bogen } LL' = \frac{r_1}{r} \times \text{Bogen } BB'$$

so ist

$$Q \times \text{Bogen } LL' = Q \times \frac{r_1}{r} \times \text{Bogen } BB'.$$

Mittelst der Tafeln für die Kreisbögen und der correspondirenden Sehnen findet man für die Sehne $BB' = 1{,}896 \cdot r$, den zugehörigen Bogen *) $BCB' = 2{,}4938 \cdot r_1$; folglich ist die gesuchte Arbeit des Widerstandes gleich

$$2{,}4938 \cdot r_1 \cdot Q.$$

Setzt man in diesem Ausdruck für Q seinen ihm äquivalenten Werth aus (α), so erhält man

---

*) Diejenigen, welche mit den ersten Elementen der Trigonometrie vertraut sind, werden die Länge des Bogens BB' ohne Hülfe der bezeichneten Tafeln auf folgende Weise sehr leicht finden.

Es ist Bogen BCB' (Fig. 161) = $2r\varphi$, wenn man den Winkel BAC mit φ für den Halbmesser = 1 bezeichnet; aber

$$2{,}4938 \cdot r_1 \cdot Q = 2{,}4938 r_1 \cdot \frac{rP}{\pi r_1} = 0{,}7938 \cdot r \cdot P$$

Der Ueberschuß der Arbeit der Kraft über diejenige des Widerstandes, während durch die Warze der Bogen **BCB'** beschrieben wird, ist also augenscheinlich

$$1{,}896 r \cdot P - 0{,}7938 r \cdot P = 1{,}102 r \cdot P.$$

Die Arbeit der Kraft, während die Warze von **B'** an dem Bogen **B'GHEB** durchläuft, ist

$$2r \cdot P - \text{Sehne } BB' \times P$$

oder, da $BB' = 1{,}896 \cdot r$ ist, gleich

$$(2 - 1{,}896)\, r \cdot P = 0{,}104 r \cdot P$$

und die Arbeit des Widerstandes in demselben Bogen

$$2\pi r_1 \cdot Q - \text{Bogen } LL' \times Q$$

da nun Bogen $LL' = 2{,}4938 \cdot r_1$, so ist diese Arbeit gleich

$$(6{,}2832 - 2{,}4938)\, r_1 \cdot Q = 3{,}7894 \cdot r_1 \cdot Q$$

oder für Q seinen Werth aus (a) gesetzt, gleich

$$3{,}7894 \cdot r_1 \cdot \frac{rP}{\pi r_1} = 1{,}206 \cdot r \cdot P$$

Der Ueberschuß der Arbeit der Kraft über diejenige des Widerstandes, während der Bogen **B'GHEB** von der Warze beschrieben wird, ist also

$$0{,}104 \cdot r \cdot P - 1{,}206 \cdot r \cdot P = -1{,}102 \cdot r \cdot P$$

Da dieser Ausdruck sich mit negativen Zeichen ergiebt, so ersieht man daraus: daß die Arbeit des Widerstandes größer, als die der Kraft ist. Es ist also der Ueberschuß der Arbeit der Kraft über diejenige des Widerstandes, wenn die Warze den Bogen

BCB' durchläuft $= 1{,}202 \cdot r \cdot P$

B'GHEB " " $= -1{,}202 \cdot r \cdot P$

$\varphi = \text{Bogen}\ (\sin. = \frac{BD}{r})$.

Da nun $BD = 0{,}948 \cdot r$, so ist

Bog. (sin. $= 0{,}948$) $=$ Bogen $71^\circ\ 26'\ 30''$

die Länge dieses Bogens erhält man nach Vega's log. Handbuch (16te Auflage Seite 275) gleich 1,2469; folglich ist Bogen

$BCB' = 2 \times 1{,}2469 \cdot r = 2{,}4938 \cdot r.$

Erstere strebt, die lebendige Kraft des Schwungrades zu vermehren, Letztere dieselbe zu vermindern; man muß also diese von jener abziehen, um die Größe der Arbeit der Kraft, welche die Vermehrung der lebendigen Kraft erzeugt, zu erhalten und hat daher als Ausdruck für dieselbe

$$1{,}102 \cdot r \cdot P - (-1{,}102 \cdot r \cdot P) = 2{,}204 r \cdot P$$

Das Doppelte hievon, nemlich $4{,}408 \cdot r \cdot P$ ist der Vermehrung der lebendigen Kraft gleich, mithin ist

$$\frac{\Pi}{g}(V^2 - v^2) = 4{,}408 \cdot r \cdot P$$

oder

$$\frac{\Pi}{g}(V + v)(V - v) = 4{,}408 \cdot r \cdot P \qquad (\delta)$$

Bezeichnet man nun mit V_1 die mittlere Geschwindigkeit des Schwungrades, d. h. diejenige, welche dasselbe bei dem vorgeschriebenen mittlern Gange der Maschine annehmen muß, und das Gewicht Π soll so genommen werden, daß, wenn die Geschwindigkeit V_1 wächst oder abnimmt, diese Zunahme oder Abnahme nicht größer oder kleiner als mV_1 (wo m einen ächten Bruch, etwa $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{20}$ rc. bezeichnet) sei, so ist klar, daß das Maximum der Geschwindigkeit durch $V_1 + mV_1$ und das Minimum derselben durch $V_1 - mV_1$ ausgedrückt ist, oder daß

$$V = V_1 + mV_1$$
$$v = V_1 - mV_1$$

ist; werden nun diese beiden Gleichungen einmal addirt und das anderemal subtrahirt, so erhält man

$$V + v = 2V_1$$
$$V - v = 2mV_1$$

substituirt man diese für $V + v$ und $V - v$ gefundenen Werthe in (δ), so erhält man

$$\frac{\Pi}{g} \cdot 4mV_1^2 = 4{,}408 \cdot r \cdot P$$

und hieraus

$$\Pi \cdot V_1^2 = 1{,}102 \cdot \frac{g \cdot r \cdot P}{m} \qquad (\iota)$$

Da nun V_1 durch die Zahl der Umgänge, die das Schwungrad in einer gegebenen Zeit z. B. in einer Minute vollbringt und durch den mittlern Halbmesser seines Ringes gegeben ist, so ist folglich **Π** bekannt.

Man kann zu dem Ausdruck $\Pi \,.\, V_1^2$ auch auf einem andern Weg gelangen und ihn durch die Anzahl der Pferdekräfte, denen die bewegende Kraft äquivalent ist, sowie durch die Zahl der Umgänge des Recepteurs *) in einer gegebenen Zeit z. B. in einer Minute ausdrücken. Bezeichnet also **n** die Zahl dieser Umgänge in einer Minute, so ist die Arbeit der bewegenden Kraft in dieser Zeit durch $n \,.\, 2r \,.\, P$ oder durch $\frac{n \,.\, r \,.\, P}{30}$ in einer Sekunde ausgedrückt; setzt man ferner die bewegende Kraft **N** Dampfpferden gleich — von denen jedes **Φ** Pfund auf einen Fuß in der Sekunde erhoben gleich ist — **), so hat man

*) Unter dem Recepteur muß hier derjenige Theil der Maschine verstanden werden, welcher mittelst der Lenkstange seine Wirkung auf den Krummzapfen überträgt.

**) In Frankreich drückt man die Kraft eines Dampfpferdes durch 75 Kilogramme auf 1 Meter in einer Sekunde erhoben aus und schreibt dieses Produkt auf folgende Weise

$$75^{k.\,m}$$

wo die rechts oberhalb der Zahl 75 stehenden Buchstaben k und m anzeigen, daß 1 Kilogramm auf 1 Meter in einer Sekunde erhoben gedacht wird, und die Zahl 75 giebt an, daß dieses Produkt (k. m) 75 mal zu nehmen ist.

Nun sind 75 Kilogramme, auf 1 Meter erhoben, gleich
510,9 Preuss. Pfund auf 1 Preuss. Fuß erhoben
423,8 Oestreich. . . . Oestreich. . . .
458,9 Bayr. . . . . . . Bayr. . . . .
wofür man als runde Zahlen 510, 424 und 458 annehmen kann.

Die Kraft eines Dampfpferdes in nachbenannten Maaßen und Gewichten ausgedrückt, wird also folgendermassen angeschrieben, nemlich

$$\frac{n \cdot r \cdot P}{30} \Phi \times N$$

oder

$$r \cdot P = \frac{30\Phi \cdot N}{n} \qquad (\zeta)$$

Aus (ε) erhält man

$$r \cdot P = \frac{m \cdot \Pi \cdot V_1^2}{1{,}102 \cdot g}$$

folglich ist

$$\frac{m \cdot \Pi \cdot V_1^2}{1{,}102 \cdot g} = \frac{30\Phi \cdot N}{n}$$

und hieraus

$$\Pi \cdot V_1^2 = 33{,}06 \cdot \frac{g \cdot \Phi \cdot N}{m \cdot n} \text{*)} \qquad (\eta)$$

Wenn das Schwungrad — wie zuweilen der Fall statt findet — nicht auf der Welle des Krummzapfens, sondern auf

---

für Preuss. Maaß und Gewicht gleich 510 $^{\text{T. f.}}$
Oestreich . . . . 424 $^{\text{T. f.}}$
Bayr. . . . . 458 $^{\text{T. f.}}$

wo die rechts oberhalb stehenden T und f anzeigen, daß 1 Pfund auf 1 Fuß in einer Sekunde erhoben gedacht und so oftmals genommen wird, als die voraussstehende Zahl es ausdrückt.

*) Für Franz. Mß. und Gw. ist: $g = 9{,}81$; $\Phi = 75$; also

$$\Pi V_1^2 = 24324 \cdot \frac{N}{m \cdot n}$$

Für Preuß. Mß. und Gw. ist: $g = 31{,}26$; $\Phi = 510$; also

$$\Pi V_1^2 = 527063 \cdot \frac{N}{m \cdot n}.$$

Für Östr. (Wiener) Mß. u. Gw. ist: $g = 31{,}03$; $\Phi = 424$; also

$$\Pi V_1^2 = 434950 \cdot \frac{N}{m \cdot n}$$

und für Bayr. Mß. und Gw. ist: $g = 33{,}6$; $\Phi = 458$; also

$$\Pi V_1^2 = 508755 \cdot \frac{N}{m \cdot n}$$

einer andern, mit jener durch Zahnräder in Verbindung stehenden Welle angebracht ist, so drückt n die Zahl der Umgänge des Krummzapfens oder den Wechsel der damit verbundenen Lenkstange und nicht die Anzahl der Umläufe des Schwungrades aus. Die Zahl m scheint willkührlich gewählt werden zu können, denn je kleiner m ist, desto unbeträchtlicher ist die Veränderung der Geschwindigkeit, und wenn man will, daß dieselbe nur sehr wenig betragen soll, so darf man nur dem Gewichte des Schwungrades einen sehr großen Werth geben. Allein durch die Vermehrung des Gewichtes kommen die Schwungräder, die ohnehin sehr kostspielig in der Anschaffung sind, einestheils viel höher zu stehen und anderntheils erzeugen sie dann in den Lagern, worin ihre Wellen liegen, größere Drückungen, und somit einen beträchtlichern Reibungswiderstand. Je nach Umständen kann dieser so bedeutend werden, daß er mehr als die Hälfte von der Arbeit der bewegenden Kraft consumirt. Wenn z. B. ein Schwungrad ein Gewicht von 40,000 Pfund hätte und der Reibungscoefficient wäre $\frac{1}{10}$, so betrüge der Reibungswiderstand 4000 ℔; würde nun dasselbe 30 Umdrehungen in der Minute oder eine halbe in der Sekunde machen und die Zapfen der Welle hätten $7\frac{3}{4}$ Zoll Durchmesser, so wäre ihre Peripherie circa 2 Fuß und daher die durch die erzeugte Reibung absorbirte Kraft während einer Sekunde durch $4000 \times \frac{1}{2} \times 2 = 4000$ ℔. f. ausgedrückt, welche Größe beiläufig 9 Pferdekräften entspricht, (wenn unter dem angenommenen Maaße und Gewichte Oestreichisches verstanden wird) und die von der Größe der Arbeit der bewegenden Kraft hinweg genommen werden.

Man ersieht hieraus: daß die Zahl m nicht willkührlich angenommen werden darf, sondern daß die Bestimmung ihres Zahlenwerthes von der Vergleichung der durch ihre Annahme sich ergebenden Vortheile und Nachtheile, so wie von dem Zweck, welchen man mit dem Schwungrade erreichen will, abhängig ist. Wenn Maschinen sich mit vieler Regelmäßigkeit bewegen sollen, so wird man $m = \frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{10}$ setzen und

wenn eine mittelmäßige Regelmäßigkeit genügt, so ist es hinreichend, $m = \frac{1}{10}$ zu nehmen. Die Engländer geben für Dampfmaschinen, die zum Betrieb von Spinnereien bestimmt sind, der Größe m einen Werth bis $\frac{1}{30}$, was aber eine Uebertreibung zu sein scheint.

52. Das Schwungrad in Verbindung mit dem Krummzapfen von doppelter Wirkung. — Wenn der Krummzapfen doppelwirkend ist, so ist die Berechnung des damit verbundenen Schwungrades der im vorigen Paragraphen statt gefundenen analog; weil aber die Wirkung der Kraft und des Widerstandes in dem halben Umgang ECG (Fig. 161) dieselbe, wie in demjenigen GHE ist, so ist es nicht nothwendig, die Untersuchung der Bewegung auf den ganzen Umgang auszudehnen, sondern es ist hinreichend, wenn man die Bewegung, während daß die Warze den Halbkreis ECG durchläuft, betrachtet. In diesem Falle ist während der Dauer eines halben Umganges die Arbeit der Kraft gleich $2r \cdot P$ und diejenige des Widerstandes gleich $\pi r_1 \cdot Q$; man hat also

$$2r \cdot P = \pi r_1 \cdot Q$$

und hieraus

$$Q = \frac{2r \cdot P}{\pi \cdot r_1} \qquad (\alpha_1)$$

Die Stellung der Warze des Krummzapfens für das Minimum und Maximum der Geschwindigkeit des Schwungrades ist dann von der im Paragraph 51 gefundenen verschieden. Denn substituirt man in der Gleichung (γ) für Q den eben erhaltenen Werth aus (α_1), so hat man

$$P \times AD = \frac{2r \cdot P}{\pi \cdot r_1} \cdot r_1$$

und hieraus

$$AD = \frac{2r}{\pi} = 0{,}637 \cdot r.$$

Daher ist

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = r\sqrt{1 - 0{,}637^2} = 0{,}771 \cdot r$$

also die Sehne $BB' = 2 \times 0{,}771 \cdot r = 1{,}542 \cdot r$, folglich ist, während die Warze den Bogen BCB' durchläuft, die Arbeit der Kraft

$$1{,}542 \cdot r \cdot P$$

und die Arbeit des Widerstandes

$$1{,}761 \cdot r \cdot Q \text{ *)}$$

oder für Q seinen Werth aus (α_1) gesetzt, gleich

$$1{,}121 \cdot r \cdot P.$$

Es ist somit der Ueberschuß der Arbeit der Kraft über diejenige des Widerstandes für denselben Bogen

$$(1{,}542 - 1{,}121)\ r \cdot P = 0{,}421 \cdot r \cdot P. \qquad (\beta_1)$$

Die Arbeit der Kraft, während die Warze die Bögen EB und $B'G$ durchläuft, ist hier ebenfalls

$$2r \cdot P - \text{Sehne } BB' \times P = 0{,}458 \cdot r \cdot P,$$

weil $BB' = 1{,}542 \cdot r$; und die Arbeit des Widerstandes für dieselben beiden Bögen

$$\pi r_1 \cdot Q - \text{Bogen } LL' \times Q = 1{,}3806 \cdot r_1 \cdot Q$$

weil Bogen $LL' = 1{,}761 \cdot r_1$; oder wenn man für Q seinen in (α_1) gefundenen Werth setzt

$$1{,}3806 \cdot r_1 \cdot Q = 1{,}3806 \cdot \frac{2r \cdot P}{\pi \cdot r_1} = 0{,}8789 \cdot r \cdot P.$$

Also der Ueberschuß der Arbeit der Kraft über diejenige des Widerstandes für die beiden Bögen EB und $B'G$ gleich

$$(0{,}458 - 0{,}8789)\ r \cdot P = -0{,}4209 \cdot r \cdot P \qquad (\gamma_1)$$

wofür man $-0{,}421 \cdot r \cdot P$ schreiben kann.

Der in (β_1) erhaltene Unterschied der Arbeit der Kraft und des Widerstandes strebt, die lebendige Kraft des Schwung-

*) Denn es ist Bogen $BCB' = 2r \cdot \varphi$, wenn der Winkel $BAC = \varphi$, also

$$\varphi = \text{Bog. } (\sin. = 0{,}771) = \text{Bog. } 50^\circ.\ 26'\ 37''$$

Die Länge dieses Bogens (für den Halbmesser = 1) ist nach (Vega's log. Handbuch. S. 275) gleich 0,88039, daher

$$\text{Bogen } BCB' = 2 \times 0{,}88039 \cdot r = 1{,}761 \cdot r.$$

rades zu vermehren, und der in (γ_1) Erhaltene sie zu vermindern.

Daher ist die Größe der Arbeit, welche in einem halben Umgange die lebendige Kraft um $\frac{\Pi}{g}(V^2 - v^2)$ vermehrt, gleich

$$0{,}421 \cdot r \cdot P - (-0{,}421 \cdot r \cdot P) = 0{,}842 \cdot r \cdot P.$$

Das Doppelte dieses Werthes muß aber der Vermehrung der lebendigen Kraft gleich sein, folglich hat man

$$\frac{\Pi}{g}(V^2 - v^2) = 1{,}684 \cdot r \cdot P$$

Wird statt der Geschwindigkeiten V und v die Mittlere V_1 eingeführt, so ist

$$\frac{\Pi}{g} \cdot 4m\,V_1^2 = 1{,}684 \cdot r \cdot P$$

oder

$$\Pi V_1^2 = 0{,}421 \cdot \frac{g \cdot r \cdot P}{m}. \qquad (\delta_1)$$

Will man ΠV_1^2 durch die in einer Minute statt findenden Umgänge oder Wechsel n und durch die Zahl N der Pferdekräfte Φ ausdrücken, so ist die während eines Umganges geleistete Arbeit der Kraft gleich $4r \cdot P$, also

$$\frac{4n \cdot r \cdot P}{60} = \frac{n \cdot r \cdot P}{15}$$

die Arbeit in einer Sekunde, daher

$$\frac{n \cdot r \cdot P}{15} = N \cdot \Phi$$

und hieraus

$$r \cdot P = 15 \cdot \frac{N \cdot \Phi}{n}.$$

Wird in (δ_1) für $r \cdot P$ dieser eben gefundene Werth substituirt, so erhält man

$$IIV_1^2 = 6{,}315 \cdot \frac{g \cdot N \cdot \Phi}{m \cdot n} \text{ *)} \qquad (\iota_1)$$

Vergleicht man jetzt diesen Ausdruck mit dem im Paragraph 51 (η) für ein mit dem einfachen Krummzapfen verbundenes Schwungrad gefundenen, so ersieht man, daß jener (η), mit Ausnahme des Zahlen-Coefficienten, diesem hier in (ι_1) Erhaltenen in Hinsicht der übrigen Glieder ganz gleich ist; daß aber der Zahlen-Coefficient in dem Ausdruck für den einfachwirkenden Krummzapfen — (in η) — fünfmal größer als in dem — (in ι) — für den doppelwirkenden Krummzapfen ist. Bei gleicher mittlerer Geschwindigkeit, gleicher Anzahl Pferdekräfte und gleicher Abweichung von jener erfordert also der einfachwirkende Krummzapfen ein Schwungrad, das fünfmal schwerer als für einen doppelwirkenden Krummzapfen sein muß. Diese Folgerung beweist, daß es in der Regel vortheilhafter ist, die Bewegung einer Maschine möglichst unabhängig von der Anwendung des Schwungrades zu reguliren. Denn das Gewicht desselben würde sich auf ein Viertel reduciren, wenn die bewegende Kraft auf die beiden Arme eines doppelten Krummzapfens von einfacher Wirkung vertheilt ist, und es würde sogar nur ein Zehntel betragen, wenn sie an den drei Armen eines dreifachen Krummzapfens wirkt, wie man sich durch die specielle Ausführung der Rechnungen überzeugen kann.

53. **Betrachtungen über die Berechnung anderer Schwungräder.** — Das vorhergehende Beispiel des Krummzapfens, für welchen wir die

---

*) Für Franz. Mß. und Gw. ist $IIV_1^2 = 4645 \cdot \frac{N}{m \cdot n}$

„ Preuss. „ „ „ „ $= 100677 \cdot \frac{N}{m \cdot n}$

„ Österreich. „ „ „ $= 83082 \cdot \frac{N}{m \cdot n}$

„ Bayr. „ „ „ „ $= 97185 \cdot \frac{N}{m \cdot n}$

Dimensionen des damit verbundenen Schwungrades bestimmt haben, und das, auf diese Weise angeordnet, einen Bestandtheil der Dampfmaschinen bildet, ist in einer Menge von Umständen nicht mehr anwendbar. Namentlich, wenn der Widerstand constant ist und continuirlich wirkt, dagegen die Richtung der Kraft in Bezug auf den Arm des Krummzapfens sich jeden Augenblick verändert; oder wenn die Wirkung der bewegenden Kraft fortwährend constant bleibt, hingegen der Widerstand varirt, wie bei Sägmühlen, wo der Widerstand eine wechselseitige Bewegung hat; oder wenn die Richtung des Widerstandes sich continuirlich verändert und abwechselnd Unterbrechungen erleidet. Der Gang der Rechnung, um die Dimensionen des zur Regulirung der Bewegung einer Maschine erforderlichen Schwungrades zu bestimmen, ist alsdann für jeden besondern Fall ein Anderer. Es ist daher vor Allem nöthig, die während der Dauer einer Umdrehung, oder vielmehr während einer vollständigen Periode statt findenden Umstände der Bewegung zu erforschen und die beiden Zustände des Gleichgewichtes, oder diejenigen, für welche die augenblickliche Arbeit *) der Kraft und des Widerstandes einander gleich sind, zu bestimmen, weil für dieselben die Geschwindigkeit ein Maximum oder Minimum ist. Wenn überdieß die Größe der durch die Kraft erzeugten und der durch den Widerstand zum Theil absorbirten Arbeit berechnet und für das Minimum und Maximum der Geschwindigkeit die lebendige Kraft bestimmt wurde, so kann man dann mittelst der Anwendung des Princips der lebendigen Kräfte eine Gleichung bilden, und aus dieser die Dimensionen des Schwungrades ableiten. Da aber diese Rechnungen so oftmal von Neuem begonnen werden müssen, so oft man besondere Fälle zu betrachten hat, so ist es unmöglich, eine allgemeine Regel für die Berechnung des Schwungrades aufzustellen und deshalb geben wir im Nach-

---

*) Statt des Ausdruckes: der in dem Zeitelement geleisteten Arbeit wird man von hier an augenblickliche Arbeit schreiben.

stehenden einige Beispiele, die als Wegweiser bei dem Gang dieser Rechnungen dienen werden.

I. Eisenwalzwerke. — Ein Eisenwalzwerk besteht aus zwei gußeisernen Cylindern oder Walzen, von denen sich jeder mit seinen beiden Zapfen in den Lagern zweier verhältnißmäßig starker Ständer in der Art dreht, wie es die Pfeile a und b (Fig. 162) anzeigen. Beide Walzen können vermittelst Schrauben oder Keile, die auf eine schickliche Weise in den beiden Ständern angebracht sind, um eine geringe Größe von einander entfernt oder einander genähert werden, so daß dadurch zwischen ihnen ein mäßiger Raum entsteht, der jedesmal durch die Dicke, zu welcher die zu walzende Metallplatte zusammengedrückt werden soll, bestimmt ist. Wenn nun diese das erstemal zwischen den beiden Walzen durchgegangen ist, so muß sie dem vor dem Walzwerk placirten Arbeiter über die obere Walze zurück gereicht werden, worauf sie von diesem dem Walzenpaare neuerdings zum Durchgange dargeboten wird. Zwischen dem Moment, wo die Metallplatte die Walzen verlassen hat und demjenigen, wo sie für den zweiten Durchgang wieder bereit liegt, verfließt eine gewisse Zeit, während welcher zwar die bewegende Kraft continuirlich fortwirkt und die Walzen sich drehen, aber nicht arbeiten. Ein Walzwerk arbeitet also nicht continuirlich, sondern mit periodischen Unterbrechungen. Während jeder solchen Unterbrechung vermehrt sich die Geschwindigkeit graduell und erlangt ihre höchste Gränze in dem Augenblick, wo die Metallplatte den Walzen zum wiederholten Durchgang dargeboten wird; während nun jene durch diese hindurchgeht, vermindert sich die Geschwindigkeit, weil die augenblickliche Arbeit des Widerstandes diejenige der bewegenden Kraft übertrifft, und erreicht ihre niedrigste Gränze in dem Moment, wo die Metallplatte die Walzen verläßt. In vorliegendem Falle ist also, in Betracht, daß das Maximum der Geschwindigkeit mit dem Moment, wo die Metallplatte dem Walzenpaar dargeboten wird und das Minimum derselben mit dem, wo jene die Walzen verläßt, correspondirt, die Be-

stimmung der Dimensionen des Schwungrades sehr einfach. Wenn man durch Beobachtungen oder durch Rechnung die Größe der während des Durchgangs der Metallplatte nothwendigen Arbeit finden kann, und man zieht davon diejenige, welche während dieses Durchganges von der bewegenden Kraft verwendet wird, ab, so ist das Doppelte dieser Differenz, dem Verlust der lebendigen Kraft des Schwungrades, während daß das Maximum seiner Geschwindigkeit in das Minimum derselben sich verändert, gleich. Nennt man also S die Differenz der Größen beider Arbeiten, V das Maximum und v das Minimum der Geschwindigkeit eines Punktes der mittlern Peripherie des Schwungrades, so wie Π dessen Gewicht, so hat man

$$\frac{\Pi}{g}(V^2 - v^2) = 2S$$

und hieraus das Gewicht

$$\Pi = \frac{2g \cdot S}{V^2 - v^2}$$

Dieses Schwungrad muß auf der Axe der einen Walze aufgezogen werden, und da diese ungefähr 20 Umgänge in der Minute machen, so kennt man also die mittlere Geschwindigkeit V_1; wenn überdieß die Bedingung gegeben ist, daß das Maximum und das Minimum der Geschwindigkeit nicht mehr als um $m \cdot V_1$ von der Mittlern abweichen soll, so kann man dann die Rechnung wie für den Krummzapfen durchführen und wird

$$\Pi = \frac{g \cdot S}{2m \cdot V_1^2}$$

erhalten, in welchem Ausdruck man $m = \frac{1}{15}$ oder $\frac{1}{20}$ setzen kann. Ausserdem muß der Bedingung Genüge geleistet werden, daß nemlich die verwendete Arbeit der bewegenden Kraft während einer vollständigen Periode oder während der Zeitdauer, in welcher die Metallplatte den Walzen zweimal

dargeboten wird, der Arbeit der Widerstände, die durch die Metallplatte und Reibung erzeugt werden, gleich sei. *)

II. Sägemühlen. — Die Betrachtungen, welche man in Betreff der Anordnung eines Schwungrades für eine Sägemühle anzustellen hat, sind von den eben stattgefundenen verschieden. Man weiß, daß auf den Sägegatter die wechselseitige Vertikalbewegung mittelst eines mit einer Are, die ihre Bewegung durch die wirksame Kraft erhält, verbundenen Krummzapfens und der damit vereinigten Lenkstange (Fig. 163) übertragen wird; daß die Säge nur im Niedergehen schneidet und im Aufsteigen unthätig ist. Es ist also die Warze des Krummzapfens im ersten halben Umgange, wenn der Sägegatter aufsteigt, mit dessen Gewicht und mit dem der Lenkstange belastet; hingegen im Niedersteigen desselben begünstigt die mit diesem Gewicht belastete Warze die Wirkung der Kraft, hat aber ausserdem den Widerstand, welchen das zu zerschneidende Holz der Säge entgegen setzt, zu überwinden; dieser Widerstand, welcher mit der Dicke und der größern Festigkeit des Holzes zunimmt, kann als ein mittlerer Werth, z. B. als derjenige, den ein Stück astloses Eichenholz von einem Fuß Dicke erzeugt, angenommen werden. Dies vorausgesetzt, kann man nun von Punkt zu Punkt für alle die kleinen, durch die Warze beschriebenen, gleichgroßen Bogenelemente untersuchen, wie die augenblickliche Arbeit der Kraft und diejenige des Widerstandes während eines vollständigen Umgangs sich verändert; die Stellungen der Warze, für welche diese Arbeiten einander gleich sein werden, sind augenscheinlich diejenigen, wo die Geschwindigkeit ihr Minimum oder Maximum erreicht hat. Berechnet man hernach für diese Zustände der Bewegung die Arbeiten der Kraft und der Widerstände, sowie die Zu- oder Abnahme der lebendigen Kraft, und bildet aus diesen Größen nach

*) In dem dritten Bande werden wirklich ausgeführte Schwungräder speciell betrachtet und in dem Atlase die vollständige Construktion eines Schwungrades aufgenommen werden.

dem Principe der lebendigen Kräfte eine Gleichung, wobei man das in den Paragraphen 51 und 52 angegebene Verfahren berücksichtigt, so kann man dann mittelst dieser Gleichung die Größe des Gewichtes von dem Schwungrade bestimmen.

III. Maschinen-Spinnereien. — Es gibt gewisse Maschinen, deren sämmtliche Theile eine continuirliche, möglichst gleichförmige Bewegung besitzen müssen, und wenn diese durch irgend eine äussere Ursache merkliche Veränderungen erleidet, so wird dadurch ihre Wirkung sehr unregelmäßig und das Produkt, welches sie liefern, unvollkommen. Dahin gehören z. B. die Maschinen-Spinnereien, deren sämmtliche Spinnstühle durch eine und dieselbe bewegende Kraft gleichzeitig ihre Bewegung erhalten und von denen oft einer oder mehrere für kurze Zeit durch die zu ihrer Beaufsichtigung aufgestellten Arbeiter ausgerückt, oder ausser Thätigkeit gesetzt werden, ohne daß man in diesem Augenblick die Arbeit der bewegenden Kraft unmittelbar modificiren kann. Auch würde es schwierig sein, die Bewegung zu reguliren, wenn man von dem, was in den Arbeitsräumen vorgeht, so wie die Zahl der ausgerückten Spinnstühle und die Zeitdauer der stattgefundenen Unterbrechung nicht wahrnehmen könnte. Hier muß also ein mit der bewegenden Kraft in Verbindung stehendes Schwungrad die Regulirung der sämmtlichen nicht ausgerückten Spinnstühle übernehmen. Wir wollen nun den Fall setzen, daß die Arbeit sämmtlicher Spinnstühle durch die Kraft von 24 Pferden ausgedrückt sei und daß sich diese Kraft auf 20 Pferde reducirt, wenn drei oder vier Spinnstühle während einer mittlern, mit t bezeichneten Anzahl von Sekunden ausgerückt werden. Die Arbeit des so reducirten Widerstandes ist also durch $20 \, . \, t \times \Phi^{\text{ti. f.}}$ ausgedrückt, wenn $\Phi^{\text{ti. f.}}$ die Arbeit eines Pferdes in einer Sekunde bezeichnet. Nehmen wir nun ferner an, daß die Arbeit der bewegenden Kraft, wodurch sämmtliche Maschinen des Etablissements ihre Bewegung erhalten, 23 Pferden gleich ist. Der Ueberschuß dieser Arbeit über diejenige des reducirten Widerstandes beträgt also: $23 - 20 = 3$ Pferde oder gleich

$3\,\Phi^{\mathfrak{W}.f.}$ Dieselbe wiederholt sich in t Sekunden tmal, ist also durch $3\,t \times \Phi^{\mathfrak{W}.f.}$ ausgedrückt und ertheilt am Ende dieser Zeit dem Schwungrade eine Geschwindigkeit V, die größer ist, als diejenige V_1, mit welcher sich dieses bewegt, wenn alle Spinnstühle arbeiten. Folglich ist

$$\frac{\Pi}{g}\,(V^2 - V_1^2)$$

der Zuwachs der lebendigen Kraft des Schwungrades und dieser muß gleich

$$2 \times 3t\,.\,\Phi^{\mathfrak{W}.f.}$$

sein; man hat also:

$$\frac{\Pi}{g}\,(V^2 - V_1^2) = 6\,.\,t\,.\,\Phi^{\mathfrak{W}.f.}$$

Verlangt man, daß $V = V_1 + \frac{1}{10}\,V_1 = \frac{11}{10}\,V_1$ sei, somit die Zunahme der Geschwindigkeit $\frac{1}{10}$ betrage, so ist $V^2 = 1{,}21\,.\,V_1^2$, daher

$$\frac{\Pi}{g}\,.\,1{,}21\,.\,V_1^2 = 6\,.\,t\,\Phi^{\mathfrak{W}.f.}$$

oder

$$\Pi V^2 = 4{,}96\,.\,g\,.\,t\,.\,\Phi^{\mathfrak{W}.f.}$$

Nichts ist nun leichter, als mittelst dieser Gleichung das Gewicht Π des Schwungrades zu bestimmen. Wenn der Gang der Maschinen eine noch größere Regelmäßigkeit erfordert, so kann man anstatt $\frac{1}{10}$ für die Zunahme der Geschwindigkeit $\frac{1}{15}$ oder $\frac{1}{20}$ nehmen. Wenn die Spinnerei durch eine Dampfmaschine bewegt wird, so bestimmt man das Gewicht des Schwungrades unabhängig von der Betrachtung der Spinnstühle, indem man die Zunahme der Geschwindigkeit zu $\frac{1}{30}$ annimmt, wenigstens ist dies die Methode der Engländer. Wir glauben indessen, daß es besser sei, zuerst das Gewicht eines Schwungrades für die Zunahme der Geschwindigkeit gleich $\frac{1}{15}$ zu berechnen und hernach das Gewicht eines andern für die Regulirung der Spinnstühle zu bestimmen; findet man das Gewicht des zweiten Schwungrades beträchtlicher, als das zuerst berechnete, so ist dieß ein Beweis, daß die Zu-

nahme der Geschwindigkeit kleiner, als $\frac{1}{15}$ sein muß, und das Gewicht muß vermehrt werden; ist hingegen dieses gefundene Gewicht kleiner, so zeigt dieses, daß man sich auf das erste Schwungrad beschränken muß. Die Regulirung der Bewegung in den Maschinenspinnereien ist um so wesentlicher, als von derselben die größere oder geringere Vollkommenheit der gelieferten Produkte abhängt und muß daher mit der größten Sorgfalt angeordnet werden.

Wenn eine Mahlmühle ihre Bewegung durch ein Wasserrad erhält, so ist keine Veranlassung gegeben, mit derselben ein Schwungrad zu verbinden, weil der Läufer selbst die Funktion eines solchen ausübt und gleichförmig auf die zwischen ihm und dem Bodenstein befindlichen Körner wirkt. Erhält aber eine Mahlmühle ihre Bewegung mittelst einer Dampfmaschine, so ist zwar ein Schwungrad nothwendig, dasselbe braucht aber nicht so schwer zu sein, und im Allgemeinen müssen solche Maschinen unabhängig von dem arbeitenden Theile derselben regulirt werden.

VII.

Von der Verzahnung der Räder.

54. Bedingungen für den Eingriff der Zähne. — Wenn die kreisförmige Bewegung eines Maschinentheils auf einen andern in der Art übertragen werden soll, daß sich dieser zweite mit derselben Gleichmäßigkeit und Regelmäßigkeit wie der erste bewegt, so kann dies, wie wir in (3. Abth. 23) gesehen haben, mittelst Ketten oder Riemen ohne Ende, die um Trommeln oder Scheiben gelegt sind, bewerkstelligt werden, in so fern die Kraft, welche diesen Maschinentheil in Bewegung setzt, mit mäßiger Energie wirkt; ist diese aber beträchtlich, so ist es zweckmäßiger, die Peripherien der Trommeln oder Scheiben mit Zähnen zu versehen, die gegenseitig in einander greifen und die Peripherien in derselben Weise herumführen, als wenn die eine Scheibe auf der andern herumrollte, und mit dieser fortwährend in einfacher Berührung, ohne vor- oder rückwärts zu gleiten, verbliebe.

Um die Peripherien zweier auf einander rollender Räder zu finden, reicht es hin, das Verhältniß, welches zwischen ihren gleichzeitigen Umdrehungen statt findet, so wie die Lage ihrer Axen, zu kennen. Der Abstand der letzteren kann zwar beliebig sein, doch ist derselbe so zu wählen, daß die Durchmesser der beiden zusammengehörigen Räder zwischen zwei und sechs Fuß liegen, weil über diese Grenzen hinaus ihre Ausführung mit größerer Schwierigkeit verknüpft ist. Wenn nun die Axen parallel sind (der Fall, womit wir uns beschäftigen werden), so theilt man ihren Zwischenraum CC′ (Fig. 164) in zwei Theile CT, C′T, die den in gleichen Zeiten statt

findenden Umläufen der Räder um jene Axen umgekehrt proportional sind, und erhält somit die Halbmesser derjenigen Kreise, die auf einander rollend gedacht werden, und welche man Grundkreise nennt. *) Wenn man jetzt zwei Scheiben, deren Halbmesser den oben gefundenen CT und C′T gleich sind, auf den Axen C und C′ in der Art anbringt, daß sich die Eine A gegen die Andere B preßt, und man dreht jene um ihre Axe C, so wird durch diese Bewegung und durch den statt findenden Druck die Scheibe B mitgenommen und ebenfalls um ihre Axe C′ gedreht, und zwar in der Weise, daß sie zwei, drei n Umgänge, während die Scheibe A nur einen vollbringt, machen wird, je nachdem ihr Halbmesser nur die Hälfte, oder ein Drittel, oder ein n^{tel} von dem der Scheibe A beträgt. Sollen nun diese Scheiben durch gezahnte Räder, die sich mit denselben oder proportionalen Geschwindigkeiten drehen, ersetzt werden, so bringt man die Zähne nicht unmittelbar auf den Grundkreisen derselben, sondern auf damit parallel laufenden, die sich innerhalb jener befinden, an, während die Zähne selbst über die Grundkreise hervorragen.

---

*) Hätte man z. B. den Fall, wo das eine Rad A in 20 Sekunden 3 Umgänge und das andere B in 12 Sekunden 5 Umgänge vollbringen soll, so muß man zuerst die Zahl der Umläufe beider Räder auf gleiche Zeiten reduciren. Man wählt für die eine Zeit eine solche Zahl, die die gegebenen Zeiten als Faktoren enthält, also hier 20 × 12 oder 240 Sekunden. In dieser Zeit macht das erste Rad 3 × 12 = 36 und das andere 5 × 20 = 100 Umgänge. Es stehen also die gleichzeitigen Umläufe beider Räder in dem Verhältniß

$$36 : 100 \quad \text{oder} \quad 9 : 25.$$

Beträgt nun der Abstand beider Axen 8 Fuß, so ist

$$CT : CT = 25 : 9$$

oder $$CT : CC' = 25 : 34$$

folglich $$CT = \frac{25 \times CC'}{34} \times \frac{25 \,.\, 8}{34} = 5{,}882 \text{ Fuß}$$

und $$CT = 8 - 5{,}882 = 2{,}118 \text{ Fuß}.$$

Den Theil **bd** (Fig. 165) des Zahns, welcher über den Grundkreis **MN** vorsteht, nennt man den Kopf oder Vorsprung, und denjenigen **ab**, welcher sich zwischen dem Parallelkreis **mn** und dem Grundkreis **MN** befindet, den Fuß desselben; der Grundkreis trennt also den Fuß des Zahns von dessen Kopfe.

Die Bestimmung des Eingriffes der Zähne ist von folgenden Bedingungen abhängig:

a. die Zähne ein und desselben Rades müssen einander gleich sein;

b. die Zwischenräume der Zähne beider in einander greifender Räder müssen gleich groß sein;

c. die äusseren Formen der Zähne, in Bezug auf die durch ihre Mitte gehende Ebene, müssen symmetrisch sein;

d. jeder Zahn des einen Rades soll in der Regel nicht eher einen Zahn des andern Rades berühren, als bis sich beide mit ihren Begrenzungsflächen in der durch die Mittelpunkte beider Räder gehenden Geraden — der Mittelpunktslinie — befinden, endlich

e. soll die Kurve, vermöge welcher sich die Zähne gegenseitig fortschieben, so gestaltet sein, daß beide Räder sich mit constanten Winkelgeschwindigkeiten, oder in der Art bewegen, als wenn der Grundkreis des einen auf dem des Andern rollte.

a. — Für die leichte Ausführung des Eingriffes zweier Räder ist es erforderlich, daß die Zähne eines jeden Rades durchaus einander gleich sind und auf der Stirnfläche desselben regelmäßig herum stehen. Jedoch ist es nicht nothwendig, daß ihre Dicke, d. h. das Maaß von einem Zahn zu dem Nächstfolgenden auf dem Grundkreis gemessen, für jegliches Rad dieselbe sei. Denn die Zähne eines eisernen Rades brauchen nicht so dick zu sein, als diejenigen eines hölzernen Rades, insofern Beide denselben Widerstand zu bezwingen haben. Dagegen ist es nöthig, die Zähne solcher Räder, die sich rasch bewegen, dicker zu machen, weil sie sich in derselben Zeit mehr abnützen.

b. — Man nennt die auf dem Grundkreis eines Zahnrades gemessene Distanz von der Mitte eines Zahnes bis zur Mitte des Nächstfolgenden, die Theilung. Dieselbe muß nicht nur für alle Zähne des einen Rades, sondern auch für diejenigen des Andern gleich groß sein. Denn da der Eingriff zweier Räder successive erfolgt, so würden die Zähne sich wechselseitig drücken oder zwängen, wenn die gleichzeitig durchlaufenen Wege der Grundkreise während der Dauer des Eingriffes einander nicht gleich wären. Hieraus folgt, daß die Zahl der Radzähne den Durch- oder Halbmessern ihrer Grundkreise proportional sein müssen; so daß z. B., wenn das eine Rad 15 Zähne, das Andere 30 Zähne hat, der Halbmesser von diesem doppelt so groß als von jenem ist. Gewöhnlich werden die Eintheilungen auf den Grundkreisen — die man deswegen auch Theilkreise nennt — ausgeführt, und wir werden die dem Zwecke am besten entsprechenden Methoden später in nähere Betrachtung nehmen. Hier fügen wir nur noch die Bemerkung bei, daß, wenn ein Zahn des einen Rades während des Eingriffes sich zwischen zwei Zähnen des andern Rades befindet, der leichten und ungehinderten Bewegung wegen es nothwendig ist, daß ein gewisser Spielraum zwischen denselben statt finde. Diesen Spielraum nimmt man für genau gearbeitete Räder zu ein Zwölftel, und für Solche, die sich nicht mit gleicher Genauigkeit herstellen lassen, zu ein Sechstel der Dicke der Zähne an. Der Abstand zwischen zwei Zähnen des einen Rades ist folglich so groß als die Dicke eines Zahnes des andern Rades nebst dem Spielraum, so daß die Theilung den beiden Zahndicken und dem Spielraum zusammengenommen gleich ist.

c. — Oft findet in Maschinen der Fall statt, daß die Räder derselben sich nicht immer in demselben Sinne bewegen; damit sich nun diese sowohl in der einen, als in der entgegengesetzten Richtung ohne Schwierigkeit drehen können, ist es nöthig, daß jeder Zahn durch zwei ähnliche Kurven symmetrisch begrenzt werde.

d. — Wenn die Zähne zweier Räder sich der Mittelpunktslinie CC′ nähern und vor derselben in Berührung kommen, so stemmen sich ihre Begrenzungsflächen gegen einander und verursachen dadurch Drückungen gegen die Axen der Räder; wenn hingegen sich dieselben von der Mittelpunktslinie CC′ entfernen, so gleiten ihre Begrenzungsflächen übereinander weg, ohne diese Drückungen zu erzeugen. Man muß daher einen vor der Mittelpunktslinie statt findenden Eingriff der Zähne möglichst zu vermeiden oder zu beseitigen suchen und die Zähne folglich so anordnen, daß sie erst in der Mittelpunktslinie beginnen, einander zu schieben. Auch müssen ihre Begrenzungsflächen möglichst glatt sein und die Form derselben so gewählt werden, daß die durch sie gebildeten Köpfe der Zähne nicht zu steil seien. Denn sind ihre Begrenzungsflächen rauh, so wird dadurch der Reibungswiderstand unnöthigerweise vergrößert oder leicht eine Verletzung der Zähne veranlaßt, und sind ihre Köpfe zu steil, so drücken sich diese in die Flanken der Zähne des andern Rades ein, wodurch entweder ihr Abbrechen oder ein gänzlicher Stillstand der Maschine veranlaßt wird. Die Form der Zähne ist also im Allgemeinen nicht willkührlich. Man kann sie niemals durch eine concave Kurve begrenzen oder ihren Querschnitten die Form eines Rechteckes oder eines Trapezes geben, nicht deswegen, weil ein mit solchen Zähnen versehenes Rad nicht im Stande wäre, auf ein Anderes eine gleichförmige Bewegung überzutragen, sondern weil Zähne von solcher Form, wenn sie sich vor der Mittelpunktslinie begegnen, die bezeichneten Mißstände herbeiführen und den Bruch oder die Zerstörung der Maschine veranlassen würden. Wirklich sieht man in Fig. 166, wo die Scheitel A der Zähne a und b sich der Mittelpunktslinie CC′ annähern, daß die continuirliche Bewegung in der durch die Pfeile angegebenen Richtung ohne statt zu findenden Bruch nicht weiter erfolgen kann, weil die Summe der Entfernungen CA und AC′ größer als CC′ ist. Jenseits der Mittelpunktslinie, wo der Winkel B sich öffnet, kann hingegen die Bewegung ohne irgend eine Störung statt finden.

e. — Die Begrenzungsflächen, mittelst deren die Zähne sich gegenseitig schieben, müssen immer eine convexe Form haben, damit sie sich während des Eingriffes tangiren, und so gestaltet sein, daß während der Bewegung die Winkelgeschwindigkeiten beider Räder ein constantes Verhältniß zu einander behalten. Diesen Bedingungen kann man auf vielerlei Weise entsprechen. Denn ist die Kurve für die Begrenzung der Zähne des einen Rades **A** beliebig gegeben oder angenommen, so wird man immer im Stande sein, für die Zähne des Rades **B** eine Begrenzungskurve aufzufinden, welche die Eigenschaft besitzt, das mit der Erstern verbundene Rad so um dessen Axe zu bewegen, als wenn sein Grundkreis auf demjenigen des zweiten Rades herumrollte. Seien z. B. amb und a′mb′ (Fig. 167) die an den Grundkreisen **A** und **B** befestigten Kurven, so wird, während die beiden Grundkreise sich um ihre Axen **C** und **C′** gleichzeitig drehen, amb mit a′mb′ in Berührung sein, oder wenn man sich den Grundkreis **A** befestigt denkt, und also um diesen der Andere **B** herum rollen muß, die Kurve a′mb′ und ihr Berührungspunkt fortwährend ihre Lage verändern, letzterer aber beständig in der Kurve amb verbleiben, und folglich diese eine ganz genaue Einhüllungskurve für alle Lagen von jener sein.

Erwägt man nun, daß alle Punkte des beweglichen Grundkreises, sowie der Kurve a′mb′ kleine Kreisbögen um den jedesmaligen Berührungspunkt **T** beider Grundkreise beschreiben, und daß die sich berührenden Elemente m beider Kurven amb, a′mb′ mit einem dieser kleinen Bögen zusammenfallen und daher mit diesem verwechselt werden können, so ist es augenscheinlich, daß die gemeinschaftlichen Normalen der beiden Zahnkurven, während daß sich diese berühren, durch den Berührungspunkt beider Grundkreise gehen müssen.

55. Allgemeine Methode, die Zahnkurven zu zeichnen. — Wenn die Zahnkurve für



den einen Grundkreis gegeben ist und man will die mit derselben Correspondirende für den andern Grundkreis finden, so kann dies mechanisch auf folgende Weise geschehen. Man nimmt zwei aus einem Brette ausgeschnittene Kreise, deren Peripherien denjenigen der Grundkreise gleich sind und welche man auf einer ebenen Tafel so aneinander legt, daß sie sich gegenseitig tangiren. An dem einen Kreise, für welchen die Zahnkurve gegeben ist, befestigt man eine genau nach dieser Kurve geformte Patrone und der andere Kreis wird auf der Tafel befestigt, so daß sich derselbe auf keinerlei Weise drehen oder seine ihm gegebene Lage verändern kann. Um diesen festen Kreis rollt man den, woran die Patrone befestigt ist, und damit derselbe während seiner Bewegung nicht abgleite, so verbindet man die beiden Mittelpunkte der Kreise durch eine dünne Schiene, welche mit einigem Spielraum um die Axe derselben beweglich ist, und wickelt um die Peripherie des beweglichen Kreises einen Pergamentstreifen, dessen eines Ende an diesem, das Andere an dem unbeweglichen Kreise befestigt ist; deutet man für die auf einander folgenden verschiedenen Lagen des beweglichen Kreises und der damit verbundenen Patrone mittelst eines Bleistiftes die jedesmalige Lage der letztern an und zieht zuletzt um diese eine Einhüllungskurve, so ist dieselbe die Begrenzungs-Kurve für die Zähne des befestigten Kreises. So einfach die so eben angegebene Methode in ihrer Demonstration ist, so führt sie dennoch in der Anwendung auf Schwierigkeiten, die nicht leicht zu beseitigen sind, und deshalb geben wir im Nachstehenden ein graphisches Verfahren an, das von jenen frei ist.

Das Profil der mit dem Kreise **A** zu verbindenden Zähne sei durch die Kurve **aTb** (Fig. 168) gegeben; um diejenige **tt′u** für die Zahnprofile des Kreises 1,1′ und 2,2′ **B** zu erhalten, trage man vom Punkte **T**, wo die Mittelpunktslinie **CC′** die beiden Grundkreise schneidet, gleich große Bögen **T1′, 12′, 2t′** und **T1, 12, 2t** auf jeden der Grundkreise, so sind die Punkte 1,1′, 2,2′ diejenigen, welche während der Bewegung zusammenfallen werden. Man verlege nun die Kurve **aTb** nach

a′t′b′, so daß dieselbe durch den Punkt t′ geht und bestimme jetzt die kürzesten Entfernungen zwischen dieser Kurve und den Punkten T, 1′ und 2′; mit diesen gefundenen Größen als Halbmesser beschreibe man aus T, 1 und 2 Kreisbögen αα, ββ, γγ und ziehe an diese, von t ausgehend, eine tangirende Kurve, so ist dieselbe die Form für die gesuchten Zahnprofile. In der Anwendung kann man sich auch damit begnügen, die beiden Theilungen der Grundkreise, jeden in zwei gleiche Theile Tm, mt und Tm′, m′t′ (Fig. 169) zu theilen, aus T und m mit den auf die vorhin beschriebene Weise erhaltenen Halbmessern Kreisbögen zu ziehen und an diese tangential eine vom Punkte t ausgehende Kurve zu legen. Will man noch einfacher verfahren, so suche man den Durchschnittspunkt i der ersten Normale Ti (Fig. 170) mit der Kurve a′i′b′, verbinde diesen Punkt mit t und ziehe durch die Mitte n dieser Linie eine zu ihr Senkrechte no, welche den Grundkreis A in o schneiden wird. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt eines Kreisbogens, dessen Halbmesser oi oder ot ist, und derselbe giebt hinreichend genau die Krümmung für den mit dem Grundkreis A verbundenen Zahn, der die gegebene Kurve a′i′b′ vorwärts schieben soll. Wenn man dieses Verfahren, die Kurve annähernd zu erhalten, in Erwägung nimmt, so wird man ohne viele Mühe erkennen, daß dasselbe darauf beruht: daß die Linie, welche den Berührungspunkt beider Zähne mit dem beider Grundkreise verbindet, gleichzeitig zu den Krümmungen beider Zähne normal ist.

56. Eintheilung der Grundkreise. — Das Verfahren, um die Theilpunkte für die Theilung der Zähne auf jedem Grundkreis zu erhalten, ist häufig mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. Nach Paragraph 54 b sind die Zahlen der Zähne, und folglich auch die der Theilpunkte, den Durch- oder Halbmessern der Grundkreise proportional; man weiß also im Voraus, in wie viele Theile Letztere eingetheilt werden müssen, um den Bedingungen der Bewegung zu entsprechen. Wenn daher diese Zahlen vielfache

von 3, 4, 5 oder 6 sind, so theilt man, mittelst des in der Elementar-Geometrie angegebenen Verfahrens, zuerst die Kreise in die durch diese Faktoren angezeigte Anzahl Theile und hernach jeden solchen Theil in die vorgeschriebenen weitern Unterabtheilungen. Ist aber die Zahl der Zähne oder ein Faktor derselben durch eine Primzahl ausgedrückt, so ist das eben angegebene Verfahren unzureichend und muß durch ein anderes ersetzt werden. Bezeichnet nun r den Halbmesser des einen Grundkreises, so ist $2\pi r$ dessen Maaß, und wenn die Zahl der Zähne durch 17, 31 oder n gegeben ist, so wird der Bogen der Theilung durch $\frac{2\pi r}{17}$ oder $\frac{2\pi r}{31}$ oder $\frac{2\pi r}{n}$ ausgedrückt sein. Die Schwierigkeit besteht aber nicht darin, die Länge dieses Bogens, sondern vielmehr die Länge der Sehne, wodurch derselbe gemessen wird, zu erhalten. Wenn man 360 durch 17, 31 oder durch n dividirt, so drückt der Quotient die Anzahl der Grade eines solchen Bogens aus und man ist nun im Stande, mittelst eines Transporteurs auf jeden der Grundkreise die Theilpunkte markiren zu können; aber dieses Werkzeug ist gewöhnlich nur von Grad zu Grad oder höchstens von halben zu halben Graden getheilt, und die vorgeschriebene Operation mit demselben läßt sich daher niemals mit der erforderlichen Genauigkeit ausführen. Kennt man die Mittelpunktswinkel dieser Bögen, so kann man auch mittelst einer Sehnentafel die verlangten Theilpunkte auf die Grundkreise tragen. Aber unter allen diesen Verfahren ist für den Fall, wenn die Bögen sehr klein sind, d. h. durch eine geringe Anzahl von Graden gemessen werden, wie dies in der Regel in Betreff der Theilung der Zähne statt findet, das folgende das Beste und Zuverläßigste. Bezeichnet man nämlich durch z den Quotienten $\frac{2\pi r}{n}$ und mit s die Sehne, welche den durch $\frac{2\pi r}{n}$ ausgedrückten Bogen mißt, so ist

$$s = z\left(1 - \tfrac{1}{24} \cdot \frac{z^2}{r^2}\right) \;*)$$

Wird mittelst dieser Gleichung der Werth von s berechnet, so giebt dieser die Zirkelweite, womit die Theilungen auf den Grundkreis aufgetragen werden.

---

*) Geübtere Leser werden sich von der Richtigkeit dieses Ausdrucks leicht überzeugen, wenn sie sich erinnern, daß die Sehne s das Doppelte des Sinus von dem halben Bogen $\frac{2\pi r}{n}$ ist. Drückt man für den Halbmesser = 1 den Bogen durch φ aus, so ist bekanntlich

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \quad (\alpha)$$

Nun ist in vorliegendem Falle

$$\varphi = \frac{\pi}{n}$$

also
$$z = \frac{2\pi r}{n} = 2r\varphi$$

hieraus
$$\varphi = \frac{z}{2r}$$

und die Sehne s, welche den Bogen z mißt $= 2r \sin \frac{z}{2r}$, man muß also in (α) statt φ den ihm gleichen Werth $\frac{z}{2r}$ setzen und diese Gleichung mit 2r multipliciren; dann erhält man

$$2r \,.\, \sin. \frac{z}{2r} = s = 2r\left(\frac{z}{2r} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{z^3}{8r^3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{z^5}{32r^5} - \ldots\right)$$

$$= z\left(1 - \frac{1}{24} \cdot \frac{z^2}{r^2} + \frac{1}{1920} \cdot \frac{z^4}{r^4} - \ldots\right) \quad (\beta)$$

In obigem Ausdruck für s sind nur zwei Glieder dieser Reihe genommen, was auch für die meisten Fälle ausreichend sein wird. Mit Hinzuziehung des dritten Gliedes der Reihe oder mittelst des Ausdrucks (β) wird man den Werth von s mit einem Grade von Genauigkeit erlangen, der jeder Anforderung in der Anwendung genügen wird.

57. Erzeugende Kurven des Eingriffes. — Wir nennen erzeugende Kurve diejenige, welche für die Form der Zähne der beiden in einander greifenden Räder gegeben ist, und mittelst welcher die Kurve für die Zähne des andern Rades bestimmt wird. Die Zahl der in der Praxis angewandten erzeugenden Kurven ist übrigens sehr klein; dieselben sind (Fig. 171):

1.) Ein ganzer Kreis, dessen Mittelpunkt in dem Grundkreise desjenigen Rades liegt, für welches er das Profil der Zähne bestimmt.
2.) Eine gegen den Mittelpunkt des Grundkreises gerichtete Gerade, und
3.) die Evolvente, die in der Art construirt wird, daß man den Kreis, von welchem sie abgeleitet werden soll, in eine unbestimmte Anzahl sehr kleiner Theile theilt, von den Theilpunkten 1, 2, 3, . . . aus Tangenten an jenen zieht, $11' = a1$, $22' = a2$, $33' = a3$ 2c. macht und durch die Punkte a, $1'$, $2'$, $3'$ 2c. eine Kurve am legt. Diese Kurve wird auch durch das Ende eines um den Kreis gelegten Fadens erzeugt, wenn derselbe fortwährend gleichmäßig gespannt erhalten und von dem Kreise abgewickelt wird.

Die Form der correspondirenden Zähne eines Rades für diese drei Arten erzeugender Kurven, von denen eine mit dem andern Rade fest verbunden ist, erhält man mittelst des im Paragraph 55 angegebenen Verfahrens sehr leicht.

58. Getriebe mit cylindrischen Triebstöcken. — Man giebt den Namen Getriebe einem kleinen Rade, das aus zwei Scheiben und Stäben (die zum Querschnitte einen Kreis haben) in der Art zusammengesetzt wird, daß die auf den beiden Scheiben senkrechten Axen der Stäbe zu einander parallel sind, und gleichweit von einander und von der Axe der Welle, worauf die Scheiben aufgezogen sind, abstehen (Fig. 172). Der Kreis, welcher dann durch sämmtliche Axen der Triebstöcke geht, ist der Grundkreis des Ge-

triebes. Um die Krümmung für die Zähne des in dasselbe eingreifenden Rades zu erhalten, legt man das Getriebe C′ (Fig. 173) so, daß einer seiner Triebstöcke die Mittelpunktslinie CC′ im Punkte T, wo sich beide Grundkreise tangiren, berührt. Dieser Punkt ist auch derjenige, in welchem der Zahn des Rades A den Triebstock ergreifen muß und den wir die Wurzel des Zahns nennen. Ist nun Tt die Theilung des Rades A, so ist der Punkt t gleichfalls die Wurzel desjenigen Zahns, welcher in dem Moment einen Triebstock verläßt, wo ein Vorhergehender in der Mittelpunktslinie von einem Zahn ergriffen wird. Verbindet man den Punkt T mit dem Punkte a, in welchem die Axe des Triebstockes bβ den Grundkreis des Getriebes schneidet, so wird die Gerade Ta eine Normale zu dem Kreis bβ sein und Tb ist folglich der kürzeste Abstand des Triebstockes bβ von dem Punkte T. Durch die Punkte t und b legt man nun einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt sich in dem Grundkreis des Rades A befindet, und hat somit die Krümmung für den Zahn eines Rades, das ein Getriebe mit Triebstöcken zu treiben hat. Der Punkt b wird ausserdem auch den Gipfel für einen Zahn des Rades bezeichnen; denn würde dieser kürzer genommen, so würde ein Zahn einen Triebstock verlassen, bevor sich der folgende in der Mittelpunktslinie befindet, was unstatthaft ist; folglich muß ein mit dem Halbmesser Cb aus C gezogener Kreis sämmtliche Zähne des Rades begrenzen. Es ist hiebei vorausgesetzt, daß die Theilung dem Durchmesser der Triebstöcke, der Dicke der Zähne und dem entsprechenden Spielraum gemäß angenommen ist. Die Zähne des Rades A gehen nur bis zu dem Grundkreis desselben, unter diesem sind zwei Benachbarte durch eine Kurve — gewöhnlich durch einen Halbkreis — so verbunden, daß in dieser entstehenden Höhlung ein Triebstock hinreichenden Spielraum hat. Uebrigens wird man aus der so eben angegebenen Construktion der Zahnkrümmungen wahrnehmen, daß, wenn ein mit cylindrischen Triebstöcken versehenes Getriebe die Bewegung auf ein Rad übertragen wird,

der Eingriff vor der Mittelpunktslinie statt findet, sollte er hinter dieser noch fortdauern, so müßten die Zähne auf der Seite, wo sie sich an die Triebstöcke anlegen, eine concave Form haben, was jedoch in der Praxis nicht zuläßig ist; hieraus folgt, daß man es vermeiden muß, ein Rad durch ein Getriebe mit cylindrischen Triebstöcken zu treiben. Da die Triebstöcke viel öfter zum Angriff kommen, als die Zähne des Rades und sich daher in Folge der Reibung mehr abnützen, so muß man ihnen einen Durchmesser, der größer als die Dicke der Zähne ist, geben; wenn man diese Dicke in drei Theile theilt, so nimmt man 4 bis 5 solche Theile für den Durchmesser der Triebstöcke, insofern beide aus demselben Material angefertigt werden. Die Triebstöcke macht man nicht länger, als es gerade nothwendig ist, damit die Zähne des Rades mit hinreichendem Spielraum zwischen den beiden Scheiben des Getriebes hindurch gehen können.

Nur die Einfachheit der Construktion ist die Ursache, daß man diese Getriebe ohngeachtet ihrer Mängel bei Maschinen anwendet. Einer ihrer wesentlichsten Nachtheile ist, daß der Berührungspunkt eines Triebstockes mit einem Zahne sich auf jenem fast nicht verändert, während das Gegentheil bei diesem geschieht. Die Reibung findet folglich nur in der Ausdehnung eines sehr kleinen Bogens auf der Oberfläche des Triebstockes statt und sie nützen sich daher sehr schnell ab, wenn sie nicht aus einem harten Material (aus Gußeisen) angefertigt werden. Die um ihre Axen beweglichen Triebstöcke, welche man zur Beseitigung der eben erwähnten raschen Abnützung vorgeschlagen hat, sind ebenfalls höchst mangelhaft, indem nach ihrer Längenrichtung zwischen ihnen und der Axe ein schädlicher Spielraum entsteht, der zu Erschütterungen und Stößen Veranlassung giebt.

Wenn man in Betreff der vorhin gegebenen Construktion annimmt, daß der Halbmesser des Getriebes unendlich groß wird, so hat man den Fall, wo ein Rad in eine Zahnstange mit cylindrischen Stäben eingreift (Fig. 173); die Mittelpunkte der letztern liegen dann in den Geraden mn

und die Senkrechte, welche man von dem Mittelpunkte des Rades auf diese Gerade mn herabläßt, ist die Größe des Halbmessers für den Grundkreis des eingreifenden Rades. Es ist leicht wahrzunehmen, daß die Kurve für die Wölbung der Zähne hier eine Evolvente sein muß, indem diese durch einen Punkt der Geraden mn erzeugt wird, wenn sie um den Grundkreis des Rades, ohne auf demselben vor- oder rückwärts zu gleiten, herum bewegt wird. In Folge der schon erörterten Gründe ersieht man, daß diese, aus einem Rad und einer Zahnstange mit cylindrischen Stäben, bestehende Vorrichtung nur dann angewendet werden darf, wenn durch jenes diese vorwärts geschoben wird. Hat hingegen eine Zahnstange die Bestimmung, ein Getriebe mit Triebstöcken in Bewegung zu setzen, so muß die Form der Zähne für die Zahnstange durchaus auf dieselbe Weise wie für ein Rad bestimmt werden. Die durch die allgemeine Methode (3. Abth. 55) erlangte Kurve ist dann eine Cycloide *), die durch einen Punkt eines auf einer geraden Linie rollenden Kreises erzeugt wird. Man beschreibt also zuerst den Grundkreis des Getriebes, d. h. denjenigen Kreis, der durch sämmtliche Axen der Triebstöcke geht und zieht an diesem eine Tangente, welche als die Grundlinie der gezahnten Stange betrachtet wird. Um nun das vollständige Profil für ihre Zähne zu erhalten, verfährt man übrigens, wie es die 1te Figur auf dem VI. Blatte des Atlases zeigt. Diese aus einer Zahnstange und aus einem Getriebe mit Triebstöcken gebildete Vorrichtung wird zuweilen angewendet, um einen mit jener verbun-

*) Eigentlich ist diese Kurve nur in dem Falle eine Cycloide, wenn die Dicke der Triebstöcke unendlich klein angenommen oder jeder Triebstock als eine mathematische Linie betrachtet wird. Da diese Annahme in der Anwendung aber nicht statt finden kann, so ist die wirkliche Kurve für die Zahnprofile eine mit der, durch die Axe c (Fig. 174) eines Triebstockes gehenden Cycloide am parallele Linie bqn, die dessen Querschnitt pq in q tangirt.

denen Maschinentheil (z. B. in den Sägmühlen den Blockwagen) durch dieses in Bewegung zu setzen, in welchem Falle also ein Getriebe mit Triebstöcken in eine Zahnstange eingreift. Eine solche Anordnung ist aber durchaus fehlerhaft und daher verwerflich, weil der Eingriff nur vor der Mittelpunktslinie statt findet; sollte dieser aber auch hinter derselben statt finden, so müßten die Begrenzungsflächen der Zähne concav statt convex sein, was, wie bereits schon erwähnt wurde, in der Anwendung unstatthaft ist.

59. Eingriff mit Epicycloiden-Zähnen. — Das bis jetzt betrachtete Getriebe mit Triebstöcken nennt man Laternengetriebe zur Unterscheidung von denjenigen mit Zähnen, die gewöhnlich den Namen: Getriebe ohne einen Beisatz führen. Obgleich man unter der Benennung Getriebe in der Regel nur ein kleines Zahnrad oder ein solches, das in Vergleichung mit einem andern eine geringere Zahl Zähne hat, versteht, so bezeichnet doch dieses Wort im Allgemeinen allemal dasjenige Rad, welches durch ein Anderes — das Treibrad — getrieben oder in Bewegung gesetzt wird. In diesem Sinne genommen, kann daher auch ein Getriebe zuweilen eine größere Zahl Zähne als das Treibrad haben. Für diesen hier betrachteten Fall ist nach Paragraph 57 die erzeugende Kurve des Eingriffes eine gerade Linie und die Zähne des Getriebes sind nichts anderes als Prismen, deren Durchschnitte, in der Ebene des Grundkreises genommen, durch zwei Halbmesser und ein Stück von jenem begrenzt sind. Weil aber diese Form scharfe Ecken darbietet, die in der Ausführung vermieden werden müssen, so läßt man die Zähne über den Grundkreis vorspringen und begrenzt diese Vorragung in dem erwähnten Durchschnitte durch einen Kreisbogen, wie aus Fig. 175 zu ersehen ist. Die Zahnprofile für ein Rad, welches in ein solches Getriebe eingreift, erhält man, indem die Einhüllungskurve einer Anzahl Kreisbögen, die nach der im Paragraph 55 angegebenen allgemeinen Methode gezogen sind,

bestimmt wird. *) Wenn in Folge der Dimensionen des Rades und des Getriebes die Zähne von jenem nur um eine mäßige Größe über den Grundkreis vorragen, so genügt es, die Einhüllungskurve durch einen einzigen Kreisbogen zu bestimmen.

Bei dem so eben erörterten Verfahren hinsichtlich der Bestimmung der Zahnprofile war stillschweigend vorausgesetzt, daß das größere Rad das kleinere (das Getriebe) treibt. Findet jedoch der entgegengesetzte Fall statt, wo das kleinere Rad die Bestimmung hat, das größere zu treiben, so muß nach dem angegebenen Verfahren das Zahnprofil für das kleinere Rad gesucht werden. Sind endlich noch die Zahnprofile für zwei Räder, die sich wechselseitig treiben, so daß bald das größere Rad das kleinere, bald das kleinere Rad das größere in Bewegung setzt, zu bestimmen, so muß auf dem vorhin bezeichneten Wege für jedes Rad besonders das Zahnprofil bestimmt werden. **)

---

*) Sind nämlich Bm, B′m′ (Fig. 176) die beiden Grundkreise des Rades und des Getriebes, C, C′ ihre Mittelpunkte, so trägt man von ihrem Berührungspunkte A aus nach B und B′ die Größe einer Theilung, so daß der Bog. AB = Bog. AB′ ist, und verbindet B′ mit C′. Diese Linie ist die Erzeugungslinie, durch welche die Einhüllungskurve für das Profil der Radzähne bestimmt wird. Man theilt nun beide Bögen AB und AB′ in der Art ein, daß Bog. Aa = Bog. Aa′; Bog. Ab = Ab′ ꝛc. ist; zieht aus a′, b′ ꝛc. zu B′C′ Senkrechte a′a″, b′b″ ꝛc., beschreibt mit diesen als Halbmesser aus a, b ꝛc. die Kreisbögen $\alpha\alpha$, $\beta\beta$ ꝛc. und zieht von B aus an diese die tangirende Kurve Bqv, so ist solche das gesuchte Profil für die Radzähne. Die so erhaltene Kurve ist eine Epicycloide.

**) Die nach der oben angegebenen Weise erhaltenen Einhüllungskurven, welche die Zahnprofile zweier, wechselseitig in einander greifender Räder begrenzen, sind ebenfalls nichts anderes, als Epicycloiden, die man auch unabhängig von der

Die nach diesen Zahnprofilen — nach Epicycloiden — geformten Zähne geben einen Eingriff, der jedoch ohngeachtet seiner mannichfachen Vorzüge auch seine Mängel hat. Letztere sind kurz zusammengefaßt, folgende:

a. Die Intensität des Drucks gegen die Zähne des Treibrades vermehrt sich nach Maßgabe, wie die Entfernung zwischen dem Berührungspunkt zweier Zahnprofile und der Mittelpunktslinie zunimmt, wodurch ein ungleichartiges Abnützen der Zähne verursacht wird *).

b. Die Form der Zähne für das Treibrad ist von dem Halbmesser des Getrieb-Grundkreises abhängig; daher

---

Größe der Theilung oder der Zahl der Zähne construiren kann und wofür man die Vorschriften in Werken, die diese transcendenten Kurven besonders betrachten, findet. Das einfachste und besonders für Räder von beträchtlichen Dimensionen geeignete Verfahren, die Zahn-Profile wechselseitig in einander greifender Räder zu erhalten, ist dasjenige, welches auf dem IV. Blatte des Atlases angegeben ist. Man kann dorten die Construktion der zu den Grundkreisen Senkrechten umgehen, wenn ihre Mittelpunkte in der Zeichnung liegen.

*) Denn es seien a'q und kc' (Fig. 177) die sich in dem Punkte b berührenden Zahnprofile; die an dem Grundkreis MN tangential wirkende Kraft sei ad und der andere Grundkreis setze einen eben so großen Widerstand entgegen. Zieht man die durch den Berührungspunkt a beider Grundkreise gehende Normale fb und zerlegt die Kraft ad nach af und ar, so wird letztere durch den Widerstand beider Axen c, c' vernichtet, und af drückt die Intensität des Druckes in b aus. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ac'b und afd ist aber $\angle$ fad = $\angle$ ac'b; der Winkel ac'b wächst aber mit der Entfernung des Punktes b von der Mittelpunktslinie cc' und die Kraft af mit der Zunahme des Winkels fad, folglich ist der Druck in b um so größer, je weiter dieser Punkt sich von cc' entfernt.

kann man mit ein und demselben Rad nicht mehrere Getriebe von verschiedenen Durchmessern in gleichförmige Bewegung setzen *).

c. Wenn der Abstand zwischen der Axe des Rades und derjenigen des Getriebes nur die geringste Veränderung erleidet, so wird dadurch der Eingriff ungenau.

60. Eingriff mit Evolventen-Zähnen. — Nimmt man als erzeugende Kurve des Eingriffes die im Paragraph 57 angegebene dritte Art: die Evolvente an, so wird die Einhüllungskurve derselben ebenfalls eine Evolvente sein und der durch beide gebildete Eingriff ist von den in vorigen Paragraphen bezeichneten Mängeln frei. Um dies einzusehen, sei T (Fig. 178) der Punkt, welcher die Mittelpunktslinie CC′ in zwei, den Winkelgeschwindigkeiten beider Räder A und B umgekehrt proportionale Theile theilt. Zieht man eine zu CC′ geneigte Linie KTK′ und zu dieser aus C und C′ die Senkrechten CK, C′K′ und beschreibt nun mit den Halbmessern CK, C′K′ die beiden Kreise MN, M′N′, so ist es augenscheinlich, daß die Linie KK′ eine gemeinschaftliche Tangente derselben ist. Nimmt man ferner an, die Theile KT und TK′ der Geraden KK′ sind unausdehnsame, bei K und K′ befestigte Fäden und beide um die Kreise MN, M′N′ herumgelegt, so werden ihre Endpunkte a und a′, während man sie wieder von jenen abwickelt, Evolventen ab, a′b′ beschreiben, welche die Profile begrenzen, nach denen die auf den beiden Kreisen MN, M′N′ angebrachten und ineinandergreifenden Zähne zu formen sind. Man wird jetzt leicht wahrnehmen, daß, wenn

*) D. h. Ein mit epicycloidischen Zähnen versehenes Rad paßt nur für ein einziges Getriebe; mit jedem andern, dessen Durchmesser größer oder kleiner als jener ist, ist sein Eingriff ungenau. Daher kann man mit einem solchen Rad nicht mehrere Getriebe von verschiedenen Durchmessern, gleichzeitig oder jedes für sich besonders, in gleichförmige Bewegung versetzen.

die eine Kurve die andere vorwärts schiebt, diese Wirkung in der Richtung ihrer gemeinschaftlichen Normale stattfinden muß. Da nun die Normale jeder einzelnen Kurve zugleich die Tangente des zugehörigen Kreises ist, so ist es augenscheinlich, daß die den beiden Kurven gemeinschaftliche Normale die durch den Berührungspunkt T beider Grundkreise Tt, Tt′ gehende Gerade KK′ ist, folglich ihr Berührungspunkt immer auf derselben Linie verbleibt und daher ihr gegenseitiger Angriff sowohl vor als hinter der Mittelpunktslinie stattfindet. Damit die nach diesen Kurven geformten Zähne an ihren äußeren Enden durch das gegenseitige Annähern der sie begrenzenden krummen Flächen nicht zu schwach werden, giebt man der gemeinschaftlichen Tangente KK′ in Bezug auf die Mittelpunktslinie CC′ eine solche Lage, daß der durch sie gebildete Winkel K′TC′ sich so viel wie möglich einem Rechten nähert. Wenn im Voraus die Größe des Bogens Tt oder Tt′, welcher die Dauer der Eingriffe vor oder hinter der Mittelpunktslinie bezeichnet, gegeben ist, so erhält man die Lage der Linie KK′ durch folgende Construktion. Man verbindet den gegebenen Punkt t′ (oder t) mit dem Mittelpunkte C′ (oder C) und fällt zu dieser aus dem Berührungspunkt T beider Grundkreise Tm, Tm′ eine Senkrechte TK′ (oder TK), verlängert dieselbe rückwärts und zieht mit C′K′ (oder CK) aus C (oder C′) eine Parallele CK (oder C′K′), so sind CK, C′K′ die Halbmesser beider Kreise, worauf die Zähne sitzen und KK′ ihre gemeinschaftliche Tangente. Da die Dreiecke CTK, C′TK′ einander ähnlich sind, so ist:

$$CK : C'K' = CT : C'T$$

d. h. die Halbmesser der beiden Kreise, mittelst deren durch Abwicklung oder durch Construktion die beiden Zahnkurven erhalten werden, haben dasselbe Verhältniß, wie die Halbmesser der Grundkreise *).

*) Man kann daher bei Rädern mit Evolventen-Zähnen, ohne einen Irrthum zu begehen, diejenigen Kreise, welche zur Con-

Eine besondere Eigenschaft der Räder mit Evolventen-Zähnen ist diese: daß der Normaldruck, womit zwei in Berührung befindliche Zähne gegen einander gepreßt werden, in allen Punkten der Linie KK' derselbe ist. Denn nennt man diesen Druck Q, die Kraft, die an den Grundkreisen tangential wirkt, P, so muß das Moment von Q demjenigen von P gleich sein, d. h. es ist

$$Q \times CK = P \times CT$$

und hieraus

$$Q = P \times \frac{CT}{CK}$$

Da $\frac{CT}{CK}$ eine constante Größe ist, so ist auch Q für alle Punkte, in denen sich die Querschnitte der Zähne berühren, constant und daher auch die zwischen den Zähnen statt findende Reibung immer dieselbe. Indessen darf man daraus nicht folgern, daß sich die Zähne gleichmäßig abnützen werden. Denn nur solche Zähne, bei denen die Arbeit der Reibung — nicht die Reibung für sich betrachtet — constant ist, werden sich so verhalten. Dies ist aber nicht der Fall mit Evolventen-Zähnen, weil während dem, daß die Seitenfläche des einen Radzahnes über diejenige des andern Radzahnes sich hinschiebt, die auf dieser in den Zeitelementen durchlaufenen Wege ungleich sind, und folglich die Arbeit der Reibung veränderlich ist. Uebrigens ist die Veränderung in der Arbeit der Reibung bei Evolventen-Zähnen geringer als bei allen andern Arten Zähnen und daher bei jenen die Abnützung gleichförmiger als bei diesen.

In allen im Vorstehenden erwähnten Fällen nimmt man die Tiefe der Zähne, oder mit andern Worten, die

---

struktion der Zahnkurven dienen, selbst als die Grundkreise betrachten. Auf diese Voraussetzung hin ist die auf dem V. Blatt des Atlases unter a) gegebene Construktion der Zähne gegründet.

Höhe ihrer Füße so an, daß, wenn zwei auf einander wirkende Zähne sich in der Mittelpunktslinie befinden, zwischen dem Gipfel des angreifenden und dem Grund des angegriffenen Zahns ein der Größe beider Räder entsprechender Spielraum stattfindet. Die Hervorragung der Radzähne über ihren Grundkreis wird so bestimmt, daß jeder angreifende Zahn so lange mit der Seitenfläche des angegriffenen in Berührung bleibt, bis die beiden folgenden in die Mittelpunktslinie CC′ (Fig. 179) eintreten. Diese Regel gilt besonders für Epicycloiden-Zähne. Bei den Evolventen-Zähnen bestimmen die Berührungspunkte K, K′ (Fig. 178) der an die Kreise MN, M′N′ gezogenen gemeinschaftlichen Tangente die Gipfel der Zähne. Soll zugleich bei diesen Zähnen die Bedingung erfüllt werden, daß der Eingriff erst in der Mittelpunktslinie beginnt, so dürfen die Zähne des Getriebes B (Fig. 179) nicht über den Grundkreis tt′ vorragen. Nimmt man den Halbmesser des Getrieb-Grundkreises unendlich groß an, so geht das Getriebe in eine Zahnstange über; die Seitenflächen ihrer Zähne sind dann senkrecht zu ihrer Grundlinie, der Grundkreis des Rades tangirt diese, und das Profil der Radzähne ist eine Evolvente, die durch einen Punkt der um den Grundkreis mTn (Fig. 180) sich bewegenden Linie AB erzeugt wird.

61. Allgemeines Verfahren, die Kurven für die Hebedaumen zu zeichnen. — Die in vorigen Paragraphen statt gefundenen Betrachtungen sind auch auf die Hebedaumen, welche einen Stempel (Stämpfer) zu erheben haben, oder welche auf einen um eine feste Axe beweglichen Hebel wirken, anwendbar. Der erste Fall kommt mit demjenigen, wo ein Rad eine Zahnstange, und der andere mit dem, wo ein Rad ein Getriebe treibt, überein. Weil aber die Hebedaumen gewöhnlich eine ziemliche Zeit in Wirksamkeit bleiben müssen und daher die Kurve, durch welche sie begrenzt sind, viel länger als diejenige für Zähne ist, so ist leicht wahrzunehmen, daß ihre

Construktion mit größerer Strenge, als es für diese geschieht, durchgeführt werden muß.

I. Hebedaumen für Stämpfer. — In einer vertical bewegbaren Stange EL (Fig. 181) ist eine Hebelatte BE angebracht und diese wird durch einen Hebedaumen oder durch eine mit dem Grundkreis Tm fest verbundene Kurve erhoben. Der Halbmesser dieses Grundkreises muß so genommen werden, daß er von der geraden Linie AB, in welcher sich das äußerste Ende B der Hebelatte bewegt, tangirt wird. Der wirkliche Kreis (die Peripherie der Welle), auf dem man die Hebedaumen befestigt, muß aber einen kleinern Halbmesser als der Grundkreis haben, damit zwischen jenem und der Hebelatte, wenn sich diese in der Mittelpunktslinie befindet, ein genügender Spielraum verbleibt und dadurch das Anstreifen der Hebelatte an dem Umfang der Welle verhindert wird. Soll nun die Welle C ihre gleichförmige Bewegung auf die Hebelatte übertragen und sich also diese längst der Linie AB in gleicher Weise bewegen, so muß der von ihr durchlaufene Weg TB dem Bogen TD des Grundkreises, den ein Punkt desselben gleichzeitig beschreibt, gleich sein. Daraus folgt also: daß die gesuchte Begrenzungskurve eine Evolvente ist, welche durch einen Punkt der um den Grundkreis sich bewegenden Geraden AB erzeugt wird. Ist also T6 (Fig. 182) die Höhe, auf welche die Hebelatte, von der Mittelpunktslinie ausgehend, erhoben werden soll und Tm ein Theil des Grundkreises, so bestimmt man zuerst den Bogen $T6' = T6$,, theilt sowohl diesen als die Höhe T6 in dieselbe Anzahl gleicher Theile, zieht die Tangente $1'1''$, $2'2''$ ꝛc. und macht $1'1'' = 5T$; $2'2'' = 4T$ ꝛc. Die durch die Punkte $6'$, $5''$, $4''$ ꝛc. gehende krumme Linie ist die gesuchte Kurve. Der Hebedaumen wird nach dieser auf verschiedene Weise gebildet, bald ist er massiv (Fig. 183), bald durchbrochen (Fig. 184), und zuweilen besteht er nur aus einem gekrümmten Stab (Fig. 185); in allen drei Fällen verläuft das eine Ende in einen Zapfen, womit es in der Welle befestigt wird.

II. **Hebebaumen für einen um eine feste Axe beweglichen Hebel** — Nimmt man an, ein um die Axe C (Fig. 186) drehbarer Hebel AT habe die Bestimmung, der Kolbenstange AB eine gleichförmige Bewegung mitzutheilen, und er selbst erhalte die seinige durch die Welle MN, so entsteht die Frage: welche Form der mit dieser verbundene Hebedaumen haben muß? — Setzt man voraus, daß der Hebel AT in dem Moment, wo der Hebedaumen TO″ anfängt auf ihn einzuwirken, eine solche Lage hat, daß sein angegriffener Punkt T sich in der Mittelpunktslinie CC′ befindet, und die Rotationsgeschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit) des Hebels, sowie diejenige der Welle bekannt ist, so theilt man zuerst den zwischen beiden Axen C und C′ stattfindenden Abstand in der Art in zwei Theile CT und TC′, daß sich diese umgekehrt wie jene Geschwindigkeiten verhalten. *) Diese sind die Halbmesser der Grundkreise, die zur Bestimmung der Begrenzungskurve für die Hebedaumen dienen. Nun wird man durch die Linie Ct die tiefste Lage, welche der Hebel annehmen soll, angeben, den Bogen Tt′ = Bogen Tt machen, jeden dieser Bögen in dieselbe Anzahl gleicher — sehr kleiner — Theile (z. B.

---

*) Um die Länge CT des Hebels zu erhalten, bezeichne man diese mit x, sowie seine gegebene Winkelgeschwindigkeit mit ψ und den Abstand der beiden Axen C und C′ mit a. Macht nun die Welle mit den Hebedaumen in der Minute n Umgänge, so ist nach (3. Abth. 42) ihre Winkelgeschwindigkeit $= \frac{n\pi}{30}$ und der Halbmesser ihres Grundkreises $= a - x$, daher

$$x : a - x = \frac{n\pi}{30} : \psi$$

und hieraus

$$x = \frac{an\pi}{30\psi + n\pi}$$

Wir werden später bei den Hammerwerken diesen Ausdruck zur Bestimmung der Dimensionen des Hammers mit Erfolg anwenden.

in vier Theile) theilen, hierauf mit den kürzesten Abständen der Punkte T, 1, 2, 3 von der Geraden Cm, aus den Punkten 1′, 2′, 3′ Kreisbögen beschreiben und an diese von t′ aus eine Einhüllungskurve t 3″ 2″ 1″ t ziehen, welche das gesuchte Profil für die Hebedaumen ist und die dem Gange der statt gefundenen Construktion gemäß eine Epicycloide ist. *)

Wenn der Hebedaumen nur eine sehr kurze Zeit in Wirksamkeit verbleibt, wie dies z. B. der Fall bei dem Zainhammer ist, so kommt seine Form gar nicht in Beachtung, weil die Erhebung des Hammers allemal durch einen Stoß des Hebedaumens gegen sein Schwanzende beginnt, wodurch die Regelmäßigkeit der Bewegung zerstört wird und es daher unnütz ist, sie gleichförmig zu machen. Es ist zwar wahr, daß in den beiden vorhergehenden Beispielen die Bewegung des Stämpfers und die des Hebels ebenfalls mit

---

*) Man kann diese Begrenzungskurve der Hebedaumen auch nach dem auf dem IV. Blatte des Atlases angegebenen Verfahren construiren. Sind nämlich nach der oben angegebenen Weise die beiden Bögen Tt und Tt′ (Fig. 187) der Grundkreise gezogen und jeder in dieselbe Anzahl gleicher Theile T1, 12, 23, 3t und T1′, 1′2′, 2′3′, 3′t′ getheilt, so halbirt man die Linie CT, zieht aus dem Halbirungspunkte O den Kreisbogen Tt″ und ausserdem die Halbmesser C1, C2, C3, welche jenen in den Punkten 1″, 2″, 3″ schneiden; hierauf zieht man durch die Punkte 1′, 2′, 3′, t′ die Halbmesser C′1′, C′2′ ꝛc. und fällt auf ihre Verlängerungen aus den Punkten 1″, 2″ ꝛc. die Senkrechten 1′φ, 2′φ, 3′φ, t″φ. Nun trägt man die Linien 1′φ, 2′φ, 3′φ von t′ nach y′, y″, y‴, zieht aus diesen Punkten zu C′m andere Senkrechte, macht ay′ = 1″φ, by″ = 2″φ, cy‴ = 3″φ und verbindet die Punkte t, a, b, c, t durch eine krumme Linie, so ist diese ebenfalls die gesuchte Kurve. Die Linie tt″ giebt zugleich die Größe desjenigen Theils von der Länge des Hebels CT an, der während der Bewegung in Berührung mit dem Hebedaumen kommt.

einem Stoß beginnt, aber der Hebedaumen bleibt eine merkliche Zeit in Berührung mit dem zu erhebenden Gegenstand, und überdieß sucht man in jenen Fällen die Geschwindigkeit der Bewegung, so gering als es die Umstände gestatten, zu machen.

62. Verfahren, die Kurve für die Hebedaumen zu zeichnen, wenn man den Stoß im Beginn des Angriffs vermeiden will. — Wenn man den Stoß in dem Moment, wo sich der Hebedaumen an die Hebelatte oder an den Hebel anlegt, vermeiden will, so ist dies nicht anders möglich, als daß man auf die Gleichförmigkeit der Bewegung dieser verzichtet. Es ist dann hinreichend, die Anordnung so zu treffen, daß die Hebelatte und der Hebedaumen in den Momenten, wo sie in Berührung mit einander kommen und von einander abgleiten, die Richtung der Bewegung der Welle, worauf die Hebedaumen angebracht sind, tangiren. Soll z. B. die Welle **M** (Fig. 188) den Hebel **CD** ohne Stoß in Bewegung setzen und bis **CD′** herabdrücken, so wird man jene so anbringen, daß sie den Hebel in seiner ursprünglichen Lage **CD** tangirt oder sehr wenig von ihm absteht. Die zu **CD** und **CD′** gezogenen Senkrechten **C′a** und **C′b** bestimmen dann die beiden Berührungspunkte **a** und **b**, in welchen die Wirkung des Hebedaumens beginnt und aufhört; und da auch der Winkel **bC′b′**, den die Welle in derselben Zeit beschreibt, in welcher der Hebel aus der Lage **CD** in diejenige **CD′** kommt, bekannt ist *), so darf man nur den Halbmesser **C′b** nach **C′b′** zurückführen, um das äußerste

*) Der Winkel aC′b = α ist von der Anzahl der Hebedaumen, die man auf dem Umfang der Welle anbringen will, abhängig. Für zwei Hebedaumen darf derselbe nicht größer als 180°
„ drei „ „ „ „ „ „ 120°
„ vier „ „ „ „ „ „ 90°
sein. Gewöhnlich nimmt man ihn etwas kleiner an, um den entsprechenden Raum für das Zurückgehen des Hebels zu ge-

Element b′ der Begrenzungskurve für den Hebedaumen zu erhalten.

Die so eben angegebene Form der Hebedaumen kann auch angewendet werden, um einen Stämpfer ohne stattfindenden Stoß zu erheben. Dann wird dieses nach der auf Seite 56 angegebenen Weise aus zwei, mittelst Bändern vereinigten Theilen **A, B** (Fig. 189), zwischen denen der Hebedaumen hindurch gehen kann, zusammengesetzt. Seine Geschwindigkeit ist in dem Augenblick, wo er vom Hebedaumen ergriffen wird, gleich Null, wächst aber, sowie er höher und höher erhoben wird, progressiv. Man kann, wenn es für besondere Zwecke nothwendig ist, die Begrenzungskurve der Hebedaumen so bestimmen, daß die Geschwindigkeit, womit der Stämpfer erhoben oder der Hebel niedergedrückt wird, nach einem gegebenen Gesetz zunimmt. Denn man wird leicht wahrnehmen, daß die Veränderung der Geschwindigkeit um so unmerklicher ist, je stärker man den Hebedaumen krümmt, und soll in dem Augenblick, wo der Hebedaumen die Hebelatte des Stämpfers oder das Ende des Hebels verläßt, ihre Geschwindigkeit gleich Null sein, so darf man jenen nur so krümmen, daß er in dem bezeichneten Moment das äusserste Ende der Hebelatte oder des Hebels tangirt. Auch muß man darauf Rücksicht nehmen, daß die Krümmung des Hebedaumens so gewählt werde, daß, wenn die Hebelatte oder der Hebel von ihm abfällt, dieselben ihre ursprüngliche Lage wieder einnehmen können, bevor der folgende Hebedaumen mit ihnen wieder in Berührung kommt; geschieht dieses Abfallen eher, so findet ein Stoß gegen den indessen vorgerückten Hebedaumen statt, und der vorgeschriebene Weg wird nicht vollständig von der Hebelatte oder von dem Ende des Hebels durchlaufen. Aus demselben Grunde muß hinterhalb des Hebedaumens jede Hervorragung, ge-

---

winnen. Bezeichnet man den Winkel DCD′, um welchen der Hebel gedreht wird, mit β, so ist auch Winkel $bC'a = \beta$ und daher der Winkel $bCb' = \alpha - \beta$.

gen welche jene beim Zurückgehen anstoßen könnten, vermieden werden. Bei der Anwendung derjenigen Hebedaumen, die keinen Stoß erzeugen, findet in dem Falle, wo sie auf einen um eine feste Axe beweglichen Hebel wirken, der Uebelstand statt, daß dieser kurz zuvor, ehe er abfällt, eine kleine Zeit in Ruhe verbleibt. Denn ist der Hebedaumen in die Lage bd (Fig. 188) gekommen, so kann er den Hebel CD′ nicht weiter herabdrücken und seine Wirksamkeit hat in diesem Moment aufgehört. Damit aber der Hebel abgleiten und in seine ursprüngliche Lage zurückkehren kann, muß das äusserste Ende des Hebedaumens noch den kleinen Weg bD′ durchlaufen; während dies geschieht, bleibt der Hebel in Ruhe oder geht nach Umständen sogar etwas weniges zurück. Man muß also den Weg bD′ möglichst zu vermindern suchen. Da nun allemal Winkel aCb = Winkel aC′b ist, so kann diese Verminderung von bD′ nur dadurch geschehen, daß man den Halbmesser C′a der Welle M so klein wie möglich annimmt.

63. **Eingriff der Winkel- oder Kegelräder.** — Bei der Bestimmung des Eingriffs der Winkelräder besteht die ganze Schwierigkeit darin: dasjenige, was in den vorhergehenden Paragraphen über den Eingriff zweier in einer Ebene liegenden Räder gesagt worden ist, auf die Lage zweier Räder im Raume anzuwenden. Wenn die Lage der Axen (3. Abth. 23) CS und C′S (Fig. 190) festgesetzt ist, so wissen wir, daß man den Winkel CSC′, welchen sie einschließen, in zwei andere CST, C′ST durch eine Gerade ST in der Art theilen muß, daß die zu den Axen Senkrechten TC und TC′ den Rotationsgeschwindigkeiten (Winkelgeschwindigkeiten) dieser Axen oder den mit ihnen verbundenen Rädern umgekehrt proportional sind. Dreht man diese Winkel CST, C′ST um ihre Axen CS, C′S, so erhält man die beiden Grundkegel SDT, STG, welche sich längst ihrer gemeinschaftlichen Kante ST berühren. Legt man jetzt senkrecht zu der Linie ST eine durch den Punkt T gehende Ebene, so schneidet diese die beiden Axen in $S_{\prime}$ und $S_{\prime\prime}$. Denkt man sich nun ebenfalls die beiden Winkel $CS_{\prime}T$ und

C′S,,T um die Axen CS,, C′S,, gedreht, so erzeugen sie zwei andere Kegel, welche die Grundkegel entgegengesetzt von dem Scheitel S begrenzen. Auf den aufgewickelten Oberflächen dieser beiden Kegel wird man die Construktion zur Bestimmung des Eingriffes ganz so, wie es früher bei der Betrachtung zweier in einer Ebene liegender Räder gelehrt wurde, ausführen. Zu diesem Zwecke wird man auf der bereits durch den Punkt T zu ST senkrecht gelegten Ebene die Oberflächen der Kegel S,DT, S,,TG aufwickeln, was keine besondere Schwierigkeit darbietet, weil die Größe ihrer Kanten S,T, S,,T und die Peripherien ihrer Grundflächen DT und TG bekannt sind, und erhält somit die Figur S,DD,G,S,,G (Fig. 191). Werden nun die Kreisbögen GTG,, DTD, als Theile der Grundkreise und die Gerade S,TS,, als die Mittelpunktslinie zweier Räder betrachtet, und führt man mit Hülfe derselben die in den vorhergehenden Paragraphen angegebenen Construktionen zur Erlangung der Zahnprofile aus, so erhält man zuletzt das Bild Fig. 192. Die Vorragungen ab und cd der Zähne über ihre Grundkreise trägt man jetzt von D (Fig. 190) nach P und von G nach Q; ebenso trägt man ihre Vertiefungen ab_1, cd_1 (Fig. 192) von D (Fig. 190) nach p und von G nach q und verbindet die Punkte P, p. Q, q mit S. Ist BT die Breite der in einander greifenden Zähne beider Winkelräder, und zieht man durch den Punkt B zu beiden Axen SC, SC′ Senkrechte BA, BF und durch A und F, wo jene die Linien DS und GS schneiden, andere Senkrechte zu diesen, so sind pPVv und qQRr die Breiten-Profile der Zähne. Die Dicke der Kränze b_1f, und d_1g (Fig. 192) wird man zuletzt von p (Fig. 190) nach E und von q nach K tragen und die Linien EH und KI ziehen, um das vollständige Profil EPVABRQKIH der beiden Winkelräder zu erhalten. Wenn man die Linien VA und Rr verlängert, bis sie die Axen SC und SC′ in U, und U,, schneiden und VU,, RU,, eben so wie DS,, GS,, um die Axen SC, SC′ dreht, so erhält man zwei andere Kegelflächen, welche die Zähne der bei-

den Winkelräder innerhalb begrenzen, und die man ebenfalls aufwickeln und auf ihnen die innern Zahnprofile construiren kann, insofern man es für nöthig erachtet. Endlich kann man auch die Aufwicklung der Kegelflächen gänzlich unterlassen, indem man, um die Zahnprofile zu erhalten, mit den Halbmessern S,T und S,,T aus S, und S,, die Kreisbögen TM und TN zieht, auf diese die vorher durch Rechnung bestimmte Größe der Theilung von T aus trägt und übrigens so verfährt, wie bei der Bestimmung des Eingriffs der Epicycloiden- oder der Evolventen-Zähne in den frühern Paragraphen angegeben wurde.

64. **Ausführung des Eingriffs.** — Hinsichtlich der Ausführung des Eingriffs verfuhr man ehedem ziemlich willkührlich und es finden sich in ältern Werken eine nicht unbedeutende Anzahl empirischer Vorschriften, die hier aufzuzählen, jedoch ganz unnütz sein würde. Heut zu Tage geht man bei der Anordnung des Eingriffs sehr strenge zu Wege, weil man die Ueberzeugung gewonnen hat, daß durch eine sorgfältige Construktion desselben sehr an Kraft gespart wird und die Räder eine größere Dauer erlangen. Da gegenwärtig beinahe alle Räder für Maschinen aus Gußeisen angefertigt werden, so verwendet man auf die Herstellung der Modelle, nach denen sie gegossen werden, große Sorgfalt. Um einen sehr genauen Eingriff zu erlangen, macht man die Zähne des Modelles etwas stärker, als es die Construktion verlangt; das hiernach abgegossene Rad wird auf einer sorgfältig centrirten Welle aufgezogen, Eine oder Beide ihrer Seitenflächen abgedreht, der Grundkreis angedeutet und hierauf derselbe in der Art möglichst genau eingetheilt, daß die Theilpunkte sich in der Mitte der Zähne befinden. Hierauf wird eine metallene Schablone nach dem zuvor construirten Zahnprofile sorgfältig ausgearbeitet, daß sie nach ihrer Vollendung die Form, wie es Fig. 193 zeigt, hat. Diese wird auf die abgedrehte Seitenfläche des Rades so aufgelegt, daß die Punkte a, b mit zweien der vorher angedeuteten Theilpunkte zusammenfallen und dann ihre Contur mit

einer Stahlnadel umrissen. Dieses Auflegen wird so oftmals wiederholt, bis die Begrenzungen aller Zähne angedeutet sind. Zuletzt wird derjenige Theil des Gusses, welcher über die gezogenen Linien vorragt, wenn er beträchtlich ist, mit einem Haumeissel, ausserdem mit einer Feile weggenommen. Um wie viel die Zähne des Modelles stärker, als die Construktion es angiebt, gemacht werden müssen, läßt sich durch keine Regel angeben; wenn das Abformen des Modelles mit vieler Sorgfalt geschieht, so mag eine halbe Linie genügen. Bei nachlässigem Abformen wird kaum eine Linie hinreichend sein. Das eben angegebene Verfahren, einen sehr genauen Eingriff herzustellen, kann nur bei ganz metallenen Rädern angewendet werden; öfter ist aber nur der Ring derselben von Gußeisen und die aus Holz angefertigten Zähne werden in die, in jenem angebrachten Zapfenlöcher (Fig. 194) eingesetzt. Sind diese von gleichen Dimensionen und alle gleich weit von einander entfernt, so kann den Zähnen, bevor man sie einsetzt, ihre vollständige Form gegeben werden; ist dies aber nicht der Fall, so läßt man diejenigen Theile der Zähne, welche über den Ring vorragen, stärker und vollendet sie erst, nachdem sie in diesem befestigt worden sind. Die Zapfenlöcher für die Aufnahme der Zähne erhalten in der Regel eine solche Form, daß zwei ihrer Seitenflächen in Ebenen, die durch die Axe des Rades gehen, liegen und die beiden andern parallel mit den Seitenflächen des Ringes sind. Der Abstand ab (Fig. 195) zwischen diesen ist etwas geringer als die Breite cd der Zähne; dadurch erhalten die Zähne die Ansätze f und g, womit sie auf der Stirnfläche des Ringes aufsitzen und nicht tiefer eindringen können. Der innerhalb desselben vorragende Theil k eines jeden Zahns ist durchbohrt und ein in dieses Loch eingetriebener hölzerner Nagel oder Keil verhindert sein Zurückweichen. Solche eingesetzte hölzerne Zähne nennt man gewöhnlich Kämme. Wenn der Halbmesser des Ringes nicht groß ist und folglich die nach der Axe des Rades gerichteten Seitenflächen der Zähne stark convergiren, so kann

man diese auch dadurch in dem Ring befestigen, daß man zwischen ihren innern Vorsprüngen a,a ꝛc. (Fig. 196) die Keile b,b ꝛc. mit Gewalt eintreibt. Endlich erwähnen wir noch einer andern einfachen Befestigung solcher Zähne, die darin besteht, daß man die prismatischen Zapfenlöcher innerhalb des Ringes erweitert, wie es Fig. 197 zeigt; werden in diese die etwas dicker angefertigten hölzernen Zähne mit Gewalt eingetrieben, so quellen diese in der Gegend ab, weil sich da dem zusammengepreßten Holze kein Widerstand entgegensetzt, wieder auf und bilden dadurch ein Hinderniß, das ihr Zurückweichen verhindert.

65. Dicke der Zähne. — Ehedem gab man den Zähnen eine sehr beträchtliche Dicke und eine Breite, welche selten das Doppelte ihrer Dicke überschritt. Die Theilung ihres Eingriffs war daher ziemlich groß und betrug gewöhnlich vier bis sechs Zoll. Gegenwärtig macht man sie viel dünner, dagegen aber viel breiter, so daß sie ohngeachtet ihrer geringern Dicke dennoch die erforderliche Stärke erhalten, um dem Bruch widerstehen zu können. Für Maschinen, die eine Kraft von vierzig bis fünfzig Pferden besitzen, giebt man jetzt den Zähnen der Räder eine Dicke von ohngefähr 2 Zoll und eine Breite von 9 bis 12 Zoll, haben hingegen jene nur eine Kraft von etwa zehn bis zwölf Pferden, so reducirt sich die Dicke der Zähne auf 1 bis 1 $\frac{1}{2}$ Zoll und ihre Breite auf 5 bis 7 Zoll. Diese Dimensionen, welche mehr durch den Gebrauch als durch bestimmte Regeln festgesetzt wurden, gelten durchaus nur für gußeiserne Räder. Die Anwendung solcher dünnern Zähne ist deßwegen sehr vortheilhaft, weil bei ihnen die Reibung des Eingriffs geringer als bei dickern ist; denn je dünner die Zähne sind, desto größer ist, bei gleichem Halbmesser der Räder, ihre Anzahl. Der Widerstand der Reibung zweier Zähne, die gegen einander wirken, wird durch eine an dem einen der Grundkreise wirkende tangentiele Kraft repräsentirt, die gleich

$$\mu . \pi . Q \left(\frac{m + m'}{m m'}\right)$$ *) oder $= \mu . \pi . Q \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$

*) Man gelangt zu diesem Ausdruck auf folgendem Weg. Es seien MN, M'N' (Fig. 177) die Grundkreise beider Räder; ca = R und ac = r ihre Halbmesser, ad = P die tangentiel an dem Grundkreis MN wirkende Kraft, welcher das Getriebe M'N einen eben so großen Widerstand entgegensetzt. Ist c'b die Flanke eines Getriebzahnes, a'bq die Krümmung eines Radzahns und b ihr beiderseitiger Berührungspunkt, so ist ab die gemeinschaftliche Normale derselben. Zerlegt man die Kraft P nach den Richtungen af, ac', so wird diese durch den Widerstand der Axe des Rades vernichtet und jene drückt die Größe der Kraft aus, mit welcher die Zähne beider Räder in dem Punkte b gegen einander gepreßt werden. Nun sind die beiden Dreiecke abc', adf einander ähnlich, daher

$$ad : af = bc' : ac'$$

oder

$$P : af = bc : r$$

hieraus

$$af = \frac{r . P}{bc'}$$

Diese Kraft bringt nach der Richtung c'b die Reibung

$$\mu . \frac{r . P}{bc'}$$

hervor. Um diese ins Gleichgewicht zu setzen, muß nach der Richtung gc' eine eben so große und ihr entgegengesetzt wirkende Kraft p angebracht werden. Wenn man daher von c zu gc' die Senkrechte cg zieht, so ist das Moment der Kraft p gleich

$$\frac{\mu . r . P}{bc'} \times cg$$

Statt der Kraft p kann man sich eine andere Kraft X', die tangentiel an dem Grundkreis MN wirkt, substituirt denken, dann ist

$$X'R = \frac{\mu . r . P}{bc'} \times cg$$

$$X' = \frac{\mu . r . P}{R} = \frac{cg}{bc'} \qquad (\alpha)$$

ist, wenn μ den von der Natur der Substanzen, woraus

Es ist aber

$$cg : ab = R + r : r$$

daher

$$cg = \frac{R + r}{r} \times ab;$$

substituirt man diesen für cg erhaltenen Werth in (α), so ist

$$X' = \mu \,.\, P \,.\, \frac{R + r}{R} \times \frac{ab}{bc'} \qquad (\beta)$$

Bezeichnet man jetzt die Anzahl der Zähne des Triebrades mit m, die des Getriebes mit m', so hat man

$$R : r = m : m'$$

oder

$$R : R + r = m : m + m'$$

daher

$$\frac{R + r}{R} = \frac{m + m'}{m}$$

Wird also in vorstehender Gleichung (β) $\frac{R + r}{R}$ mit $\frac{m + m'}{m}$ verwechselt, so erhält man

$$X' = \mu \,.\, P \,.\, \frac{m + m'}{m} \times \frac{ab}{bc'}. \qquad (\gamma)$$

Da nun X' die Größe der Kraft bezeichnet, die zur Überwindung des Widerstandes der Reibung, wenn sich beide Zähne in dem Punkte b berühren, erforderlich ist, so ersieht man aus (γ), daß dieselbe zunimmt, je weiter sich der Berührungspunkt b von der Mittelpunktslinie entfernt, und sie in dem Augenblick am größten ist, wo ein Zahn des Treibrades die Flanke eines Getriebzahnes verlassen will, wie bereits schon früher nachgewiesen wurde. Hingegen ist in dem Moment, wo die Seitenfläche eines Radzahns in die Mittelpunktslinie eintritt, der Reibungswiderstand gleich Null; daher die Größe der Kraft, die während der Bewegung beider Räder mit dem abwechselnd zu- und abnehmenden Reibungswiderstande im Gleichgewicht sich befindet, der Mittelwerth zwischen Null

die Zähne angefertigt sind, abhängigen Reibungscoefficienten (der gewöhnlich durch einen der Werthe, welche die Tafeln des 106. Paragraphen der 2. Abth. enthalten, gegeben ist), ferner Q die Größe der Kraft, mit welcher beide Räder gegenseitig auf einander wirken und m und m′ die Anzahl der Zähne jedes einzelnen Rades bezeichnen. Nennt man V den Weg, welchen ein Punkt des einen Grundkreises beider Räder in einer Sekunde durchläuft, oder mit andern Worten die Geschwindigkeit desselben, so ist das Produkt aus der Reibung der Zähne und dieser Geschwindigkeit die durch diese Reibung absorbirte Arbeit in der Sekunde, welche durch

$$\mu . \pi . Q\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\times V \text{ oder durch } \mu . \pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\times VQ$$

ausgedrückt ist. Man wird bemerken, daß in dem letztern

---

und X′. Bezeichnet man dieselbe mit X, so ist

$$X = \frac{0 + \mu . P . \frac{m + m'}{m} \times \frac{ab}{bc'}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu . P . \frac{m + m'}{m} \times \frac{ab}{bc'} . \qquad (\delta)$$

Ist $ak = \frac{2\pi r}{m'}$ die Theilung des Getriebes und die Anzahl der Zähne derselben beträchtlich, so wird, in der Voraussetzung, daß die Dauer des Eingriffes hinter der Mittelpunktslinie in der Ausdehnung einer Theilung statt finde, ab von ak und bc′ von r nicht merklich verschieden sein; man kann also in (δ)

$$ab = \frac{2\pi r}{m'} \text{ und } bc' = r$$

setzen und erhält sonach

$$X = \mu . \pi . P . \frac{m + m'}{m . m'}$$

wie oben, indem P = Q ist.

Ausdruck das Produkt VQ nichts anders, als die auf das eine Rad übertragene, von dem Halbmesser desselben unabhängige Arbeit ist. Aber zugleich ist sichtbar, daß je größer V, desto kleiner Q ist. Da nun die Peripherie-Geschwindigkeit eines Rades, das in einer bestimmten Zeit eine gewisse Anzahl Umdrehungen machen soll, proportional mit dessen Halbmesser zunimmt, so wird also, bei gleicher Arbeit, die Kraft Q vermindert, wenn man den Halbmesser vergrößert. Nehmen wir nun den Ausdruck

$$\pi . \mu . Q \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$$

welcher die Intensität des Reibungswiderstandes eines Eingriffs ausdrückt, nochmals in nähere Betrachtung, so ersehen wir, daß derselbe auf zweierlei Weise vermindert werden kann; einmal, indem man die Zahl der Zähne vermehrt, d. h. m und m′ möglichst groß nimmt und das anderemal, indem man Q verkleinert. Man kann nun die Anzahl der Zähne dadurch, daß man ihre Dicke reducirt, größer machen und Q durch Vergrößerung des Rad-Halbmessers vermindern. Es ist nun hieraus deutlich abzunehmen, daß es vortheilhaft ist, die Dicke der Zähne zu vermindern und die Radhalbmesser zu vergrößern.

Durch die Verbindung mehrerer Zahnräder beabsichtigt man gewöhnlich, die Arbeit der bewegenden Kraft von Stelle zu Stelle und zuletzt auf den Operateur der Maschine überzutragen. Jedes dieser Räder absorbirt durch seine passiven Widerstände und durch seine Reibung einen Theil der Arbeit, welcher nach Umständen ein Viertel oder ein Fünftel derjenigen betragen kann, die auf das benachbarte Rad übertragen wird. Wenn man also im voraus diese letzte Arbeit, oder diejenige der disponiblen bewegenden Kraft kennt, so kann man leicht bestimmen, wie groß die Arbeit jedes der übrigen Räder ist. Diese so erlangte Größe der Arbeit jedes einzelnen Rades ist genau das, was durch den Ausdruck VQ repräsentirt wird. Wenn wir also die gegebene Größe

der Arbeit durch V oder durch die Peripherie-Geschwindigkeit des Rades dividiren, so erhalten wir Q zum Quotienten, d. h. die Größe des Drucks, welchem die Zähne ausgesetzt sind. Diese Kraft ist es, welche die Engländer als bekannt oder gegeben voraussetzen und darnach die Dimensionen des Eingriffs bestimmen. Nachstehende Tafel ist zu diesem Zwecke von Tredgold entworfen und in dessen Werk über Dampfmaschinen von ihm mitgetheilt worden.

Tafel *)

der Zahn-Dimensionen gußeiserner Räder für gegebene Drückungen auf die Zähne.

Druck (Q) gegen die Zähne in Kilogrammen.	Größe der Theilung	Zahndicke	Zahnbreite
	in Centimetern.		
10	0,63	0,3	2,00
40	1,27	0,6	3,27
80	2,00	0,9	4,54
158	2,54	1,2	5,81
244	3,17	1,5	7,08
336	3,80	1,8	8,35
430	4,43	2,1	9,62
580	5,08	2,4	10,89
730	5,71	2,7	12,16
870	6,34	3,0	13,43
1100	6,97	3,3	14,70
1210	7,62	3,6	15,97
1500	8,25	3,9	17,24
1750	8,88	4,2	18,51
2200	9,51	4,5	19,58
2300	10,16	4,8	20,85
2600	10,79	5,1	22,12
2840	11,42	5,4	23,39
3220	12,05	5,7	24,66
3500	12,68	6,0	25,93

*) Um mittelst dieser Tafel die Zahndimensionen in Preußischem, Östreichischem und Bayerischem Maaß und Gewicht, sowie umgekehrt, ausgedrückt zu erhalten, hat man

Diese Tafel scheint zwar auf keine sichere Grundlage basirt zu sein, da die Zahndicken — man weiß nicht warum — in einem arithmetischen Verhältniß zunehmen; jedoch entfernen sich die Dimensionen, welche sie angiebt, nur wenig von denjenigen, welche durch die Erscheinung als die Passendsten befunden wurden. Die Dicke der Zähne ist im Allge-

---

1 Preuß. Pfund = 0,47 Kilogramme; (genauer = 0,4677)
1 Wiener „ } = 0,56 „
1 Bayer. „ }
1 Centimeter = 0,38 Preuß. Zoll (genauer = 0,3823)
= 0,38 Wiener „ („ = 0,3797)
= 0,41 Bayer. „ („ = 0,4111)
1 Kilogramm = 2,14 Preuß. Pfund (genauer = 2,1381)
= 1,79 Wien. od. Bayr. Pfd. („ = 1,7857)
1 Preuß. Zoll = 2,62 Centimeter (genauer = 2,6154)
1 Wiener „ = 2,63 „ („ = 2,6342)
1 Bayer. „ = 2,43 „ („ = 2,4322)

Soll z. B. der Durchmesser eines Rades (des Grundkreises desselben), das 96 Zähne, von denen jeder einem Druck von 640 Wiener Pf. ausgesetzt ist, erhalten soll, in Wiener Zollen bestimmt werden, so ist, weil 1 Wiener Pf. = 0,56 Kilogr.

640 Wiener Pf. = 640 × 0,56 = 358,4 Kilogramme.

Mit dieser Zahl geht man in die erste Colonne der Tafel ein und findet, daß dieselbe zwischen 336 und 430 fällt; man multiplicirt also jede, diesen beiden Zahlen zugehörige, Theilung, Zahndicke und Zahnbreite mit 0,38 und erhält dadurch als

	Theilung.	Zahndicke.	Zahnbreite.
kleinstes Maaß	1,44 Zoll	0,68 Zoll	3,17 Zoll.
größtes —	1,68 —	0,80 —	3,66 —

Zwischen diesen beiden Zahlenwerthen liegen die, welche man sucht. Zieht man die doppelte Zahndicke von der Theilung ab, so erhält man die Größe des Spielraums = 0,08 Zoll. Wird jetzt die wirkliche Zahndicke des Rades zu 0,75 Zoll

meinen noch von zwei Umständen abhängig, nemlich: 1) von der Kraft, welcher sie an ihren Gipfeln widerstehen müssen, ohne zu brechen und 2) von der Abnützung, welche sie nach Verlauf einer gewissen Zeit erleiden. Wird jene Kraft, so wie die Breite der Zähne constant angenommen, so ist es augenscheinlich, daß die Zähne um so dicker sein müssen, je länger sie sind, d. h. je mehr sie über den Grundkreis vorragen. Es folgt also hieraus, daß man die Zähne nicht höher

---

angenommen (man macht diese wegen der Abnützung in der Regel etwas stärker), so ist die Theilung

$$= 2 \times 0{,}75 + 0{,}08 = 1{,}58 \text{ Zoll},$$

folglich die Peripherie des Rades

$$96 \times 1{,}58 = 151{,}68 \text{ Zoll}$$

und der Durchmesser desselben $= \frac{151{,}68}{\pi} = 48{,}3$ Zoll.

Hätte man — als zweites Beispiel — die Größe des Druckes zu bestimmen, welchem die Zähne eines schon vorhandenen Rades andauernd zu widerstehen vermögen, wenn die

Zahndicke = 1,25 Bayer. Zoll
Zahnbreite = 4,00 „ „

so sind zuerst beide Werthe mit 2,43 zu multipliciren, um sie in Centimetern ausgedrückt zu erhalten. Es ist also die

Zahndicke = 3,03 Centimeter
Zahnbreite = 9,72 „

Mit der Zahndicke geht man in die dritte Colonne der Tafel ein und findet bei 3,0 den zugehörigen Druck = 870 Kilogramme, wenn die Zahnbreite 13,43 Centimeter betragen würde. Die Drückungen sind aber den Breiten der Zähne proportional, daher hat man

$$13{,}43 : 9{,}72 = 870 : Q$$

also $Q = 629{,}7$ Kilogramme,

und diese Zahl mit 1,79 multiplicirt gibt

$$Q = 1127 \text{ Bayer. Pfund}$$

als die Größe des gesuchten Druckes.

über den Grundkreis vorragen lassen muß, als zur Erlangung eines guten Eingriffs nothwendig ist. In Betreff der Abnützung der Zähne lehrt die Erfahrung, daß die Zähne der Treibräder sich nicht so schnell als diejenigen der Getriebe und daß gußeiserne Zähne, die täglich 12—18 Stunden arbeiten, sich in sechs Jahren um $1\frac{1}{3}$—$2\frac{1}{4}$ Linie abnützen. Hölzerne Zähne nützen sich hingegen noch schneller ab. Wenn daher mittelst vorstehender Tafel die Zahndicke eines Rades bestimmt worden ist, so muß man diese noch um so viel vermehren, als durch die Abnützung in derjenigen Zeit, die als die Dauer desselben betrachtet werden kann, wieder weggenommen wird.

VIII.

Berechnung des Widerstandes der Materialien.

66. Die Theile einer Maschine, welche die Arbeit irgend einer bewegenden Kraft, von einem derselben auf den andern und sofort bis zu dem Operateur übertragen, sind in der Regel prismatische oder cylindrische Körper, deren Querschnitte gewöhnlich constante Größen sind. Die Wirkungen, welche dieselben gegenseitig aufeinander ausüben, können auf viererlei Weise stattfinden. Die wirksame Kraft äußert sich entweder in der Richtung der Axe eines der Theile und strebt die Fasern desselben auszudehnen oder zusammen zu drücken; oder sie wirkt schief auf die Richtung der Axe und sucht ihn entweder zu biegen oder transversal zu verdrehen. Die stattfindende Wirkung ist direkt in den beiden ersten Fällen und relativ in den beiden letztern.

Wir haben also vier verschiedene Arten des Widerstandes der Materialien zu betrachten, nemlich:

1. den Widerstand des Zuges
2. — — — der Zusammendrückung
3. — — — der Biegung und
4. — — — der Verdrehung oder Windung.

Jede Kraft kann je nach ihrer Intensität, entweder die Form des Körpers verändern oder seine Elasticität alteriren, ja sogar ihn zerbrechen oder zerdrücken. Wenn die wirksame Kraft die letztgenannten Wirkungen hervorbringt, oder die Elasticität des Körpers zerstört, d. h. wenn nach

stattgefundener Formveränderung die Kraft auf ihn einzuwirken aufhört und er dann nicht mehr im Stande ist, seine ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, so ist dies ein Beweis, daß der Körper nicht die entsprechenden Dimensionen besitzt. Die Alteration, welche er auf diese Weise erleidet, ist immer die Ursache seiner Zerstörung und deßhalb muß man sie zu vermeiden suchen. Wenn man daher die Dimensionen der Maschinen berechnet, so muß man mit vieler Sorgfalt verfahren und besonders darauf Rücksicht nehmen, daß die Kraft, deren Wirkung der Bestandtheil einer Maschine ausgesetzt ist, nie größer, sondern allemal kleiner als diejenige Kraft, bei welcher die Alteration der Elasticität beginnt, genommen werde. Diese Kraft ist immer ein durch die Erfahrung bestimmter Bruchtheil von derjenigen, durch welche der Bruch des fraglichen Maschinentheils selbst veranlaßt wird. Wenn aber auch auf die Körper nicht immer Kräfte einwirken, die ihre Elasticität zu alteriren trachten, so wirken doch sehr häufig solche auf sie ein, die, bevor ein Körper die empfangene Einwirkung auf den ihm folgenden übertragen kann, in jenen eine Formveränderung erzeugen, wodurch ein gewisser Theil der Arbeit absorbirt wird, die, um sie berechnen zu können, voraussetzt, daß man die Größe der stattgefundenen Formveränderung kenne, um daraus die Größe des Weges, welchen der Angriffspunkt der Kräfte durchläuft, ableiten und die Größe der absorbirten Arbeit bestimmen zu können.

Handelt es sich nun darum, die Verlängerung, Verkürzung, Biegung oder Drehung, welche ein gegebener Körper durch eine auf ihn einwirkende Kraft erleidet, zu finden, oder die Dimensionen desselben zu berechnen, damit durch diese Kraft seine Elasticität nicht alterirt werde, so ist man immer auf Formeln hingewiesen, welche constante, durch die Erfahrung bestimmte, Coefficienten enthalten, die wir in folgenden vorläufig erklären wollen.

67. Erklärung der ziehenden, zusammendrückenden, biegenden und dre-

henden Kräfte. — Werth der Elasticitäts- und Widerstands-Coefficienten. — Wenn eine Kraft einen Körper nach der Richtung seiner Länge zieht, wie z. B. ein an einem Seile oder an einer vertikalen eisernen Stange aufgehangenes Gewicht, so nennt man dasselbe die ziehende Kraft oder die Traktionskraft. Ruht dasselbe Gewicht auf dem obern Ende der Stange, die sich mit ihrem untern Ende gegen ein festes Hinderniß stemmt, so preßt sie den Körper (die Stange) oder strebt, die Fasern desselben zusammen zu stauchen; dieselbe nennt man die Kraft der Zusammendrückung oder die Compressionskraft. Wirkt eine Kraft senkrecht auf die Längenrichtung eines Körpers und krümmt denselben, so daß sich die Fasern der converen oder obern Seite ausdehnen und die der concaven oder untern Seite verkürzen, so heißt diese Kraft: die Kraft der Biegung oder die Flerionskraft. Man nimmt leicht wahr, daß in jedem der Biegung unterworfenem Körper eine Faser vorhanden ist, die sich weder ausdehnt noch verkürzt, und welche man die unveränderliche oder neutrale Faser nennt. Ist endlich ein Körper mit dem einen Ende befestigt, und an seinem andern Ende rechtwinkelicht auf seine Längenrichtung ein Hebel angebracht, an welchem eine Kraft wirkt, so nennt man diese: die Kraft der Drehung oder die Torsionskraft. Ihre Wirkung ist von der Art, daß die verschiedenen Punkte einer Faser sich senkrecht zu ihrer ursprünglichen Längenrichtung verrücken und zwar so: daß ihre Abstände von ihrer primitiven Lage gleichzeitig dem Abstand dieser Faser von der Are des Körpers und ihren Abständen von der Stelle, wo der Körper befestigt ist, proportional sind. Allemal, wenn die Intensität dieser Kräfte geringer als diejenige, welche die Elasticität eines prismatischen Körpers zu alteriren vermag, sein wird, ist der constante Coefficient, welcher in den, auf den betrachteten Fall sich beziehenden Formeln enthalten ist, für die Traktions- Compressions- und Flerionskräfte immer derselbe, wenn die Natur der Substanz des Körpers ebenfalls dieselbe bleibt.

Wir bezeichnen ihn mit dem Buchstaben **E** und nennen ihn einfach den Elasticitäts-Coefficienten. In Betreff der Torsionskraft, deren Intensität unter der oben bezeichneten Grenze ist, bezeichnen wir den constanten Coefficienten mit dem Buchstaben **t** und nennen ihn Torsions-Coefficienten. Hat man die Dimensionen eines Körpers zu berechnen, der mit Sicherheit die Einwirkung einer der vier genannten Kräfte zu ertragen vermag, so daß dessen Elasticität in keinerlei Weise alterirt werde: so ist der in den betreffenden Formeln einzuführende constante Coefficient nicht nur von demjenigen der Elasticität und dem der Torsion verschieden, sondern er nimmt einen besondern Werth für jede der vier Arten der Kräfte an.

Wir haben daher einen

Coefficienten des Widerstandes der Traktion
" " " " Compression
" " " " Flexion
" " " " Torsion

Den Ersten werden wir mit **A**, den Zweiten mit **B**, den Dritten mit **R** und den Vierten mit **T** bezeichnen. Nachstehende Tafel enthält die Zahlen-Werthe dieser Coefficienten für die verschiedenen Materialien, welche gewöhnlich beim Maschinenbau angewendet werden.

Tafel der Elasticitäts- und Widerstands-Coefficienten
welche beim Maschinenbau

	Namen der Materialien.	der Elasticität oder E (α).
		Kilogr.
Steine.	Basalt	— —
	harter Granit	— —
	gewöhnlicher Granit . . .	— —
	sehr harter Marmor . . .	— —
	Marmor mit weißen Adern .	— —
	sehr harter Sandstein . .	— —
	weicher ditto . .	— —
	sehr harte Back- oder Ziegelsteine	— —
	gewöhnliche Ziegelsteine . .	— —
	gewöhnlicher Kalkstein . .	— —
	Gyps	— —
	guter, acht Monat alter Mörtel .	— —
	gewöhnlicher, sechs Monat alter Mörtel	— —
Hölzer.	sehr festes Eichenholz . .	1638 000 000
	minder festes ditto . . .	683 000 000
	festes Tannenholz . . .	1293 000 000
	minder festes ditto . . .	558 000 000
	Ulmenholz	— —
Seile.	trockene Hanf-Seile . . .	— —
	nasse ditto . . .	— —
	getheerte ditto . . .	— —
Eisen und Stahl.	geschmied. Eisen, das beste, in schwachen Stäb.	25 000 000 000
	ditto schwaches, in starken „	15 000 000 000
	graues Gußeisen . . .	9 029 000 000
	weiches „ . . .	10 653 000 000
	Stahl, der beste . . .	— —
	ditto der schlechteste . .	— —
	gewöhnliche, geschmiedete eiserne Ketten	— —
	Ankerketten mit Stegen in den Gliedern	— —

für die verschiedenen Materialien, angewendet werden.

Coefficienten				
der Drehung oder t (β).	des Widerstandes der Traktion oder A (γ).	des Widerstandes der Compression oder B (δ).	des Widerstandes der Flexion oder R (ε).	des Widerstandes der Torsion oder T (ζ).
Kilogr.	Kilogr.	Kilogr.	Kilogr.	Kilogr.
— —	— —	200	— —	— —
— —	— —	70	— —	— —
— —	— —	40	— —	— —
— —	— —	100	— —	— —
— —	— —	30	— —	— —
— —	— —	90	— —	— —
— —	— —	0,4	— —	— —
— —	2	15	— —	— —
— —	„	4	— —	— —
— —	6	50	— —	— —
— —	0,4	6	— —	— —
— —	0,9	4	— —	— —
— —	0,3	2,5	— —	— —
8 117 592	196	80	850 100	405 800
3 284 000	140	50	586 200	167 200
6 218 000	„	100	709 700	310 900
2 683 000	167	26	511 100	134 100
— —	— —	18	— —	— —
— —	125	— —	— —	— —
— —	82	— —	— —	— —
— —	95	— —	— —	— —
120 225 000	1333	1250	24 513 000	20 037 000
72 130 000	667	1250	13 710 000	12 022 000
43 420 000	167	2500	4 495 000	7 233 000
51 230 000	167	2500	7 355 000	8 600 000
— —	1500	— —	— —	— —
— —	333	— —	— —	— —
— —	2000	— —	— —	— —
— —	2667	— —	— —	— —

68. Erläuterungen zu vorstehender Tafel. —

Zu (α). Die Coefficienten **E** dienen, die Verlängerungen, Verkürzungen oder Biegungen prismatischer Körper zu messen (siehe die folgenden Paragraphen).

Zu (β). Die Coefficienten **t** beziehen sich auf prismatische Körper von rechtwinkeligen Querschnitten; sind diese Kreise, so vermehrt man die Werthe von **t** um $\frac{1}{5}$. Z. B. für eine rechtwinklicht geschmiedete Eisenstange ist der Torsions-Coefficient = 120225000, daher ist derselbe für eine cylindrisch geschmiedete Eisenstange = 174270000.

Zu (γ). Die Coefficienten **A** drücken die größte Stärke des Zuges in Kilogrammen aus, welchen die in der ersten Colonne genannten Materialien für jeden Quadrat-Centimeter ihres Querschnitts ausgesetzt werden dürfen. Bezeichnet man mit A_1 die beiläufige Kraft, von welcher sie zerrissen werden, so ist

für Steine $A_1 = 10\ A$
„ Hölzer $A_1 = 5\ A$
„ Seile $A_1 = 4\ A$
„ Eisen und Stahl $A_1 = 6\ A.$

Zu (δ). Die Coefficienten **B** repräsentiren die größte Last in Kilogrammen, womit die in der ersten Colonne genannten Körper für jeden Quadrat-Centimeter-Querschnitt beladen werden dürfen, wenn sie kubisch geformt sind. Ist hingegen ihre Höhe ein Vielfaches der kleinsten Seite ihrer Basis, und man bezeichnet diese mit **a**, jene mit **L** und ihre größte Belastung für denselben Querschnitt mit B_0, so ist, wenn

$$L = 12\ a$$

ist, für Hölzer $B_0 = \frac{5}{6}\ B$
für geschmiedetes Eisen $B_0 = \frac{5}{8}\ B.$

Ist hingegen $L = 24\ a,$
so ist für Hölzer und geschmiedetes Eisen $B_0 = \frac{1}{2}\ B.$

Für Gußeisen hat man

$$B_0 = \tfrac{2}{3} B, \text{ wenn } L = 4a \text{ ist}$$
$$B_0 = \tfrac{1}{2} B \quad " \quad L = 8a \; "$$
$$B_0 = \tfrac{1}{6} B \quad " \quad L = 36a \; ".$$

Bezeichnet man die beiläufige Last, von welcher sie zerdrückt werden, für jeden **Quadrat-Centimeter** ihres Querschnittes mit B_1, so ist

für Steine $B_1 = 10\,B$
" Hölzer $B_1 = 5\,B$
" Eisen $B_1 = 4\,B$

Zu (ε und ζ). Die Coefficienten R und T des Widerstandes der Biegung und der Drehung werden in die Brechungs-Coefficienten R_1 und T_1 verwandelt, wenn man sie für Hölzer mit 10, für Schmiedeisen mit 3 und für Gußeisen mit 4 multiplicirt. Also ist

für Hölzer R_1 oder $T_1 = 10\,R$ oder $10\,T$
" Schmiedeisen R_1 " $T_1 = 3\,R$ " $3\,T$
" Gußeisen R_1 " $T_1 = 4\,R$ " $4\,T$.

Die Werthe von T gelten nur für rechtwinkelige prismatische Körper; haben diese hingegen Kreise zu Querschnitten, so vergrößert man den Werth von T um $\tfrac{1}{6}$.

69. Formveränderung und Widerstand eines der Traktionskraft unterworfenen prismatischen Körpers. — Wenn man eine prismatische Stange betrachtet, die in der Richtung ihrer Axe durch eine in Kilogrammen ausgedrückte, unter der Elasticitätsgrenze genommene Kraft P gezogen wird, so muß man annehmen, daß dieselbe dem Verhältniß $\frac{l}{L}$ proportional ist, wenn L die ursprüngliche Länge der Stange und l die durch die Kraft P erzeugte Verlängerung derselben ausdrückt. Dieselbe Kraft wächst aber auch mit der Zahl der in der Stange enthaltenen parallelen Fasern oder mit dem Flächeninhalt O ihres Querschnittes; daher haben wir

$$P = E \times \frac{l}{L} \times O. \text{*)} \qquad (\alpha)$$

In dieser Formel ist **E** der in der vorstehenden Tafel gegebene Elasticitäts-Coefficient; **l** und **L** sind in Metern und **O** in Quadrat-Metern ausgedrückt.

Die Größe der verwendeten Arbeit, um in dem betrachteten Körper, durch die Kraft **P**, die mit **l** bezeichnete Verlängerung hervorzubringen, erhält man, indem man diese Verlängerung durch die Kraft selbst multiplicirt; es ist also dieselbe gleich

$$E \times \frac{O}{L} \times l^2.$$

Dieser Ausdruck zeigt uns, daß die Größe der Arbeit der Kraft oder des Widerstandes der betrachteten Stange,

---

*) Durch Versuche hat man aufgefunden, daß sich die durch die ziehenden Gewichte erzeugten Verlängerungen

1) gerade wie die ziehenden Kräfte,

2) wie die Längen der Körper und

3) umgekehrt wie die Querschnitte derselben

verhalten. Vergleicht man also zwei Körper von verschiedenen Längen L und L_1 und verschiedenen Querschnitten O und O_1, auf welche die Kräfte P und P_1 einwirken und die Verlängerungen l und l_1 hervorbringen: so hat man

$$\frac{L.P}{O} : \frac{L_1.P_1}{O_1} = l : l_1$$

und hieraus

$$P = \frac{L_1.P_1}{O_1.l_1} \cdot \frac{l}{L} \cdot O.$$

Ist nun für L_1, P_1 und O_1 der Werth von l_1 durch Versuche ermittelt, so ist also $\frac{L_1.P_1}{O_1.l_1}$ bekannt, und setzt man diesen Zahlen-Ausdruck $= E$, so erhält man

$$P = E \cdot \frac{l}{L} \cdot O$$

wie oben.

wie die Quadrate der erzeugten Verlängerungen, oder da diese Verlängerungen den correspondirenden Kräften proportional sind, wie die Quadrate der Kräfte zunimmt.

Wenn man die Dimensionen einer vertical aufgehangenen Stange, die an ihrem Ende die in Kilogrammen ausgedrückte Last **P** mit Sicherheit, d. h. ohne daß ihre Elasticität alterirt wird, zu tragen im Stande ist, berechnen, oder umgekehrt, aus den gegebenen Dimensionen die Größe der anzuhängenden Last bestimmen will, so hat man hiefür

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \times \mathbf{O}_1. \qquad (\beta)$$

In dieser Gleichung drückt $\mathbf{O}_1$ den Flächeninhalt des Querschnittes der Stange in Quadrat-Centimetern aus und **A** ist der in der Tafel enthaltene Coefficient des Widerstandes der Traktion. *) Ist z. B. das an eine guß-

*) Um diese Gleichung auch für andere Maaße und Gewichte brauchbar zu machen, ohne die in der obigen Tafel enthaltenen Coefficienten umzuändern, setze man für irgend ein andres Maaß und Gewicht die Belastung der Stange gleich P_1 und den Flächeninhalt ihres Querschnittes gleich q; ebenso bezeichne man das Verhältniß des Kilogramms zu dem Pfundgewicht irgend eines Staates mit α, sowie dasjenige des Quadratcentimeters zu dem Quadratzoll desselben Staates mit β,: so ist

$$P : P' = 1 : \alpha \quad \text{hieraus} \quad P = \frac{P'}{\alpha}$$

$$O_1 : q = 1 : \beta \quad \text{„} \quad O_1 = \frac{q}{\beta};$$

substituirt man die für P und O_1 erhaltenen Werthe in (β), so erhält man

$$\frac{P'}{\alpha} = A \cdot \frac{q}{\beta}$$

oder

$$P' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot A \cdot q;$$

in dieser Gleichung bezeichnen P′ und q Pfunde und Quadratzolle, man hat daher:

eiserne Stange angehängte Gewicht zu bestimmen, wenn ihr Querschnitt ein Quadrat und eine Seite derselben zwei Centimeter mißt, so hat man $O_1 = 4$ und $A = 167$, daher

$$P = 167 \times 4 = 668 \text{ Kilogramme.}$$

Verlangte man das Gewicht zu wissen, welches diese Stange zerreißen würde, so hat man nach (68. [γ]) das eben gefundene Gewicht mit 6 zu multipliciren, und erhält somit 4008 Kilogramme.

---

für Östreichisches Maaß und Gewicht

$$\alpha = 1{,}7857 \quad ; \quad \beta = 0{,}1441 \text{ und } \frac{\alpha}{\beta} = 12{,}4$$

also $$P' = 12{,}4 \, . \, A \, . \, q;$$

für Preußisches Maaß und Gewicht

$$\alpha = 2{,}1381 \quad ; \quad \beta = 0{,}1462 \text{ und } \frac{\alpha}{\beta} = 13{,}65$$

also $$P' = 13{,}65 \, . \, A \, . \, q;$$

für Bayersches Maaß und Gewicht

$$\alpha = 1{,}7857 \quad ; \quad \beta = 0{,}1691 \text{ und } \frac{\alpha}{\beta} = 10{,}56$$

also $$P' = 10{,}56 \, . \, A \, . \, q. \qquad \text{u. s. w.}$$

Dieselben Zahlen-Coefficienten lassen sich auch auf die Bestimmung der durch das Gewicht P′ erzeugten Verlängerung der Stange anwenden. Denn nach (α) ist

$$P = E \times \frac{l}{L} \times O.$$

$\frac{l}{L}$ drückt das Verhältniß der Länge des Stabes zur erzeugten Verlängerung aus, was für jegliches Maaß dasselbe ist; man hat daher nur $P = \frac{P'}{\alpha}$ und $O = \frac{q}{\beta}$ zu setzen und erhält somit

$$l = \frac{P' \, . \, L}{\frac{\alpha}{\beta} \, . \, E \, . \, q}$$

70. Formveränderung und Widerstand eines der Compressionskraft unterworfenen prismatischen Körpers. — Betrachten wir nun einen aufrecht stehenden prismatischen Körper, dessen oberer Theil mit einem in Kilogrammen ausgedrückten, unter der Elasticitätsgrenze angenommenen, Gewicht **P** belastet ist und seine Fasern zusammen zu stauchen strebt. Die im vorigen Paragraphen zu Grund gelegte Hypothese, in Betreff der durch eine Traktionskraft erzeugten Verlängerungen, ist auch zulässig bei den durch eine Compressionskraft erzeugten Verkürzungen. Man nimmt daher diese Kraft ebenfalls dem Verhältniß $\frac{l}{L}$ proportional an und setzt daher

$$P = E \times \frac{l}{L} \times O,$$

in welcher Gleichung **l** die durch das Gewicht **P** erzeugte Verkürzung, **L** die primitive Länge des Körpers, **O** dessen Querschnitt und **E** den Elasticitäts-Coefficienten bezeichnet. Folglich ist auch die Größe der Arbeit, welche der zusammengedrückte Körper zur Wiederherstellung seiner ursprünglichen Form verwenden muß, gleich

$$E \times \frac{O}{L} \times l^2.$$

Da nun der Körper einen Widerstand, welcher dem auf ihm lastenden Gewichte gleich ist, entgegensetzt, folglich diese Kraft zur Wiederherstellung der ursprünglichen Form verwendet und dadurch der Körper wieder um die Größe **l** verlängert wird: so ist auch die zur Erzeugung dieser Wirkung verwendete Arbeit dem Quadrat der Größe **l** oder dem Quadrat des entgegen gesetzten Widerstandes proportional.

Es ist nun ebenfalls sehr leicht, die Dimensionen eines aufrecht stehenden, oberhalb mit einem gegebenen Gewichte

belasteten Körpers zu berechnen, oder wenn die Dimensionen gegeben sind, mittelst dieser die Größe der Belastung zu bestimmen, was vermöge der Formel

$$P = B \times O_1$$

geschieht, in welcher B den Coefficienten des Compressions-Widerstandes, O_1 den Querschnitt des Körpers in Quadrat-Centimetern und P die Belastung in Kilogrammen bezeichnet. *) Nach (68. [♂]) sind die Coefficienten B nur zulässig, wenn der Körper eine kubische Form hat, und die mit B_0 bezeichneten nur, wenn seine Höhe das 24fache oder 36fache seiner kleinsten Seite nicht übersteigt. Wie man in jenen Fällen, wo die Höhe des Körpers die bezeichneten Grenzen überschreitet, zu verfahren hat, soll weiter unten gezeigt werden. Nehmen wir nun als Beispiel einen eichenen Pfahl, dessen Querschnitt ein Kreis ist und dessen Durchmesser 25 Centimeter oder $10\frac{1}{2}$ bayer. Zoll beträgt, so ist

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{3{,}1416 \cdot 25^2}{4} = 490 \text{ Quadrat-Centimeter,}$$

oder 83 bayer. Quadrat-Zoll der Flächeninhalt dieses Querschnittes. Wenn nun die freie Höhe dieses Pfahles das Achtzehnfache seines Durchmessers beträgt, so fällt diese Zahl zwischen 12 und 24, für welche Zahlen sein Widerstand $\frac{5}{6}$ B und $\frac{1}{2}$ B ist. Nimmt man den Mittelwerth derselben, so ist dieser $\frac{2}{3}$ B; weil nun $B = 80$ ist, so erhält man

$$P = \tfrac{2}{3} \cdot 80 \times 490 = 25970 \text{ Kilogramme}$$

oder

$$P_1 = \tfrac{2}{3} \cdot 10{,}56 \cdot 80 \cdot 83 = 46726 \text{ bayr. Pfund.}$$

---

*) Wenn P' die aufliegende Last in Pfunden, und q den Querschnitt in Quadratzollen bezeichnen, so ist:

für Wiener Maaß und Gewicht $P' = 12{,}4 \cdot B \cdot q$
„ Preußisches „ „ „ $P' = 13{,}65 \cdot B \cdot q$
und für Bayersches „ „ $P' = 10{,}56 \cdot B \cdot q$.

71. Formveränderung und Flexionswiderstand eines an dem einen Ende befestigten und an dem andern der Einwirkung einer gegebenen Kraft ausgesetzten prismatischen Körpers. — Betrachten wir einen an dem einen Ende DF (Fig. 198) befestigten prismatischen Körper DEGF, dessen Axe eine horizontale Lage hat und theilen ihn in Gedanken in eine Folge von Querschnitten pr, qs.. welche einander sehr nahe liegen und senkrecht zu jener sind. Wenn nun an dessen anderm Ende EG die Kraft P senkrecht auf seine Längenrichtung wirkt, so wird er gebogen und die zwischen den gedachten Querschnitten enthaltenen Rechtecke gehen in Trapeze über, so daß der kleine Theil pq der auf der Seite des converen Theils DE liegenden Faser sich verlängert, dagegen derjenige rs der auf der Seite des concaven Theils FG liegenden Faser sich verkürzt. Es giebt also eine zwischen diesen liegende Faser oder Schichte, die sich weder verkürzt noch verlängert und welche man, wie bereits oben erwähnt wurde, die veränderliche oder neutrale Faser oder Schichte nennt. Auch durch Versuche hat man aufgefunden, daß die obern Schichten eines in horizontaler Richtung mit dem einen Ende in einer Wand befestigten und durch eine am andern Ende wirkende Kraft vertical abwärts gebogenen prismatischen Körpers sich verlängern und die untern sich verkürzen. Zu diesem Zwecke hat man den Körper von unten mit einer Säge eingeschnitten und hierauf in diesen Sägeschnitt einen Keil eingetrieben. Der Widerstand des Körpers wurde dadurch nicht eher alterirt, als bis die Tiefe des Sägeschnitts die halbe Höhe des Körpers überschritten hatte. Berücksichtigt man nun, daß jedes, zwischen zwei benachbarten Querschnitten des Körpers befindliche Faser-Element sich um so mehr verlängert oder verkürzt, je weiter dasselbe von der neutralen Schichte entfernt ist, so ist es ganz natürlich anzunehmen: daß diese Verlängerungen oder Verkürzungen dem Abstand jeder Faser von der neutralen Schichte proportional sind.

Ferner ist ihr Widerstand nach voraus gegangener Biegung nicht nur ihren Verlängerungen oder Verkürzungen und folglich auch ihren Abständen von der neutralen Schichte, sondern auch ihren — übrigens sehr kleinen — Querschnitten proportional; der Widerstand eines jeden Faser-Elementes ist daher einem Produkte proportional, das erhalten wird, wenn man den Querschnitt jeder Faser mit ihrem Abstand von der neutralen Schichte multiplicirt. Weil die erzeugte Biegung selbst nur sehr geringe ist, so sind die Richtungen dieser partiellen Widerstände (beinahe) horizontal und folglich zu einander parallel, daher haben sie eine Resultante, die der Summe sämmtlicher vorhin genannter Produkte, oder dem Produkt aus dem ganzen Querschnitt des Körpers in den Abstand seines Schwerpunktes von der neutralen Schichte (2. Abth. 42), proportional ist. Da aber die durch die Biegung erzeugte Bewegung nur in der Richtung des Angriffspunktes der Kraft **P** stattfinden kann, so muß nothwendigerweise die Resultirende sämmtlicher Widerstände selbst gleich Null seyn, oder **die neutrale Schichte durch den Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts des Körpers** gehen. Auch muß die gesammte Arbeit aller partiellen Widerstände, derjenigen der Kraft **P**, welche die Biegung erzeugt hat, oder dem Punkt $P \times f$ gleich sein, wenn man **CB** mit **f** — welche Größe man den **Pfeil** der Biegung nennt — bezeichnet. Untersucht man die eben genannten Arbeiten der partiellen Widerstände näher, so nimmt man wahr, daß jede derselben dem Produkt aus dem Querschnitt der correspondirenden Faser in das Quadrat ihres Abstandes von der neutralen Schichte, proportional ist. Dieses Produkt ist aber das Trägheitsmoment von dem Querschnitt der Faser auf eine Axe bezogen, die in der Ebene dieses Querschnittes und zugleich in der neutralen Schichte liegt, folglich ist die gesammte, aus den Widerständen der Fasern entstehende Arbeit der Summe dieser Produkte, oder mit andern Worten: dem Trägheitsmoment des Körper-Querschnittes auf eine in der Ebene desselben liegende und durch seinen Schwerpunkt

gehende Axe bezogen, proportional. Wenn also ein auf die vorhin bezeichnete Weise befestigter Körper mit seinem freien Ende der Einwirkung einer vertikal abwärts wirkenden Kraft ausgesetzt wird, so wird derselbe um die Größe AE = f abwärts gebogen und man hat

$$P . L = \frac{R . M}{V}; \text{ oder } P = \frac{R . M}{L . V} \quad \ldots \quad (\alpha)$$

*)

$$\text{und } f = \frac{P . L^3}{3 . E . M} \quad \ldots \quad (\beta)$$

---

*) Um sich von der Richtigkeit dieser Gleichungen zu überzeugen, sei

a.) amb (Fig. 199) ein sehr kleiner Theil eines Kreisbogens, dessen Halbmesser ac = bc = ϱ ist. Zieht man aus c mit dem Halbmesser = 1 den Bogen $a_1 m_1 b_1$ und setzt diesen gleich δ, so ist δ das Maaß des Winkels acb für den Halbmesser = 1 und daher Bogen amb = s = $\varrho\delta$; folglich

$$\varrho = \frac{s}{\delta} \text{ und } \delta = \frac{s}{\varrho}$$

b.) Zieht man in den Punkten a und b an dem Bogen amb die Tangenten au und bd, so sind die Winkel bei a und b Rechte, folglich

$$\angle\, udb = \angle\, acb$$

Die Figur 200 stelle nun den in der Wand vu befestigten Körper ABCD und EF (Fig. 201) dessen normalen Querschnitt dar. Denkt man sich zwei einander sehr nahe liegende Schnitte pq und rs normal auf die neutrale Schichte mn und in dem Abstand ag = bk = v eine Faser $m_1 n_1$, so kann das zwischen diesen Schnitten enthaltene Stück ab als ein Element derselben betrachtet werden, und zieht man durch k eine Parallele mit pq, so ist bd die Größe, um welche dieses Faserelement durch die Biegung verlängert wird.

Nach §. 69 (α) ist der Widerstand p der Faser gleich

$$E . \frac{l}{L} . O. \qquad (1)$$



In diesen Formeln bezeichnen:

P die an dem freien Ende des prismatischen Körpers vertikal abwärts wirkende Kraft,

f den Pfeil oder die Größe der durch das Gewicht P erzeugten Biegung AE,

L die Länge des Körpers,

Man verlängere nun pq und rs, bis sie sich in O schneiden, setze ab = s; aO = ϱ (welche Größe den Krümmungshalbmesser des Kurvenelementes ab bezeichnet); $\angle$ pOr = δ und den Querschnitt einer Faser = q, so ist bd = $r \cdot \delta = \frac{r \cdot s}{\varrho}$

und es wird also in (1) $l = \frac{v \cdot s}{\varrho}$; L = s, folglich

$$p = E \times \frac{\frac{v \cdot s}{\varrho}}{s} \times q = \frac{E}{\varrho} \cdot v \cdot q$$

und das Moment dieses Widerstandes gleich

$$\frac{E}{\varrho} \cdot q \cdot v^2.$$

Was hier für eine ausgedehnte Faser nachgewiesen wurde, gilt auch nach §. 70 für eine zusammengedrückte Faser. Daher ist die Summe der Widerstände sämmtlicher, in dem Querschnitt EF (Fig. 201) enthaltenen Fasern gleich

$$\frac{E}{\varrho} (\Sigma q \cdot v + \Sigma' q \cdot v)$$

und die Summe der Momente derselben

$$\frac{E}{\varrho} (\Sigma q \cdot v^2 + \Sigma' q \cdot v^2). \qquad (1)$$

$q \cdot v^2$ ist aber das Trägheitsmoment von dem Querschnitt einer um v von der neutralen Schichte abstehenden Faser. Bezeichnet daher M das Trägheitsmoment des ganzen Körper-Querschnittes in Bezug auf die in seiner Ebene liegende, und durch den Schwerpunkt derselben gehende Axe $\alpha\alpha_1$ (Fig. 201) so ist

$$\Sigma q \cdot v^2 + \Sigma' q \cdot v^2 = M.$$

V den vertikalen Abstand der entferntesten Faser von der neutralen Schichte,

---

Wenn L die Länge des prismatischen Körpers und x den Abstand des Punktes k (Fig. 200) von der vertikalen Wand vu bezeichnet, so ist das Moment der an dem freien Ende des Körpers wirksamen Kraft P gleich

$$(L - x) P$$

welche der Summe der Momente sämmtlicher Faserwiderstände gleich sein muß, daher hat man

$$(L - x) P = \frac{E \,.\, M}{\varrho} \qquad (2)$$

In dieser Gleichung ist augenscheinlich

$$\frac{E}{\varrho} = \frac{R}{V}$$

wenn R die nach der Längenrichtung eines Prismas, dessen Querschnitt die Flächeneinheit ist, stattfindende, die Elasticitätsgrenze nicht überschreitende Spannung, und V den Abstand der äussersten Faser von der neutralen Schichte — jene möge sich oberhalb oder unterhalb derselben befinden — in dem betrachteten Körper bezeichnet. Denn der größte Widerstand findet in dieser äussersten Faser statt und ist gleich $q \,.\, R$. Die Widerstände in den andern Fasern verhalten sich aber: wie ihre Abstände von der neutralen Schichte; daher ist für den Abstand v

$$V : v = q \,.\, R : \frac{R}{V} \,.\, q \,.\, v,$$

also das Moment des Widerstandes der um v entfernten Faser gleich

$$\frac{R}{V} \,.\, q \,.\, v^2$$

und die Summe der Momente sämmtlicher Fasern

$$\frac{R}{V} \; (\Sigma q v^2 + \Sigma' q v^2).$$

In (1) ist aber dieselbe Summe

$$\frac{E}{\varrho} \; (\Sigma q v^2 + '\Sigma q v^2).$$

M das Trägheitsmoment des Querschnitts E_1G_1 (Fig. 198) in Bezug auf die in seiner Ebene liegende und durch seinen Schwerpunkt s gehende Are ab,

---

Folglich

$$\frac{E}{\varrho} = \frac{R}{V}$$

und daher

$$(L - x)\ P = \frac{R \cdot M}{V}.$$

Wenn man hierin $x = o$ setzt, d. h. das bis jetzt betrachtete Element des Körpers dahin versetzt, wo dieser aus der Wand hervortritt, so ist

$$P \cdot L = \frac{R \cdot M}{V}$$

wie oben.

Um den Ausdruck für f zu erlangen, müssen wir ϱ in (2) durch die Größe der Biegung (durch f) auszudrücken suchen. Zu diesem Zwecke sei AmD (Fig. 202) die neutrale Schichte, AB die an ihrem Anfangspunkt A gezogene Tangente, $Am_1 = x$, $mm_1 = y$ und $BD = f$. Denkt man sich x in eine sehr große Anzahl gleicher, z. B. in n Theile getheilt, und $m_1q_1 = k$ sei ein solcher Theil, so werden, wenn man qq_1 parallel mit mm_1 zieht, diese beiden Linien das Bogenelement mq abschneiden. Man mache nun $mn = mq$, ziehe nO und qO so, daß sie senkrecht auf dem Bogen nmq stehen, setze $nO = \varrho$, $\angle\ nOq = \delta$ und ziehe aus n und q Tangenten an die Kurve, so ist der durch sie gebildete Winkel umq = Winkel $nOq = \delta$; daher — in der Voraussetzung, daß die Kurve AmD nur wenig gebogen, n sehr groß (unendlich groß), und also mq von m_1q_1 oder k nicht merkbar verschieden sei — das Dreieck mqu ähnlich dem Dreieck Opn und folglich

$$Oq : 2mq = mq : qu$$

oder

$$\varrho : \ 2k = \ k : qu$$

also

$$\varrho = \frac{2 \cdot k^2}{qu};$$

E den Elasticitäts-Coefficienten und
R den Coefficienten des Widerstandes der Flexion.

---

substituirt man diesen für ϱ erhaltenen Werth in (2), so erhält man

$$(L = x)\ P = \frac{E \,.\, M}{2 \,.\, k^2} \,.\, qu$$

und hieraus

$$qu = \frac{2\ P}{E \,.\, M} (L - x)\ k^2. \qquad (3)$$

Nimmt man jetzt an, daß von den sämmtlichen Theilpunkten der Linie Am_1 Parallele mit mm_1 und aus den dadurch erhaltenen n Punkten n, o . . in der Kurve AD, Tangenten an diese und mit denselben aus dem Punkte m andere Parallelen gezogen werden, so liegen letztere sämmtlich zwischen den beiden Linien mz und mq und theilen daher qz in n Theile. Um also qz zu erhalten, muß man die Gleichung (3) mit n multipliciren, und erhält sonach

$$pz = \frac{2\ P}{E \,.\, M} \,.\, n\ (L - x)\ k^2. \qquad (4)$$

Um diese Größe wächst aber mm_1, wenn Am_1 oder x um $\frac{x}{n} = k$ zunimmt. Dasselbe gilt für alle andern mit mm_1, aus den in der Linie AB liegenden Theilpunkten 1, 2, 3 ... gezogenen Parallelen.

Wird daher für $x = k$ dieser Zuwachs mit w_1
$x = 2k$ „ „ „ w_2
$x = 3k$ „ „ „ w_3
. . . .
$x = nk$ „ „ „ w_n

sowie $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n$ mit y bezeichnet und in (4) x mit nk verwechselt, so ist:

$$qz = w_n = \frac{2\ P}{E \,.\, M} \,.\, (Lnk^2 - n^2k^3)$$

und in dieser Gleichung für n nach einander die Zahlen 1 . 2 . 3 . . . gesetzt,

Sämmtliche Dimensionen sind in Metern und die Belastung P in Kilogrammen ausgedrückt *).

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n = y =$$

$$\frac{2P}{E \cdot M} \cdot [Lk^2 (1 + 2 + 3 + \ldots + n) - k^3 (1 + 2^2 + 3^3 + \ldots n^3)].$$

In der Voraussetzung, daß n unendlich groß ist, wird

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2}{2}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3}$$

daher $y = \frac{2P}{E \cdot M} \cdot \left(\frac{Ln^2k^2}{2} - \frac{n^3k^3}{3}\right)$

oder da $nk = x$

$$y = \frac{2P}{E \cdot M} \cdot \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right).$$

Wird $x = L$, so geht mm_1 in BD oder f über.

Daher ist

$$f = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot M}$$

wie oben.

Aus der Gleichung (2) erhält man

$$\varrho = \frac{E \cdot M}{(L - x) P};$$

setzt man hierin einmal $x = L$ und das andremal $x = o$, so wird für $x = L$, $\varrho = \frac{E \cdot M}{o}$; was anzeigt, daß die Linie AD in D gar nicht gekrümmt ist. Für $x = o$ erhält man $\varrho = \frac{E \cdot M}{a P}$. Alle Werthe von ϱ zwischen $x = o$ und $x = L$ sind folglich größer als $\frac{E \cdot M}{a P}$, daher ist die Kurve AD in A am stärksten gekrümmt.

*) Wenn man für irgend ein anderes Maaß und Gewicht die obigen Gleichungen (α) und (β) umgestalten will und es bezeichnen

Multiplicirt man die Gleichung (α) mit $\mathbf{P}$, so ist

$$\frac{P^2 \,.\, L^3}{3 \,.\, E \,.\, M} \qquad (\gamma)$$

die Größe der zum Biegen des Körpers verwendeten Arbeit.

Wenn nun der Querschnitt des Körpers ein Rechteck **ABCD** (Fig. 203) ist, dessen Breite $AB = b$ und Höhe $AD = h$ gesetzt wird, so ist das Trägheitsmoment M desselben gleich $\frac{b \,.\, h^3}{12}$ und $V = \frac{h}{2}$, daher

$$P = \frac{R \,.\, b \,.\, h^2}{6L} \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

$$f = \frac{4 \,.\, P \,.\, L^3}{E \,.\, b \,.\, h^3} \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Ist der Querschnitt des Körpers ein Quadrat **ABCD** (Fig. 204), so wird $b = h$ und man hat

$$P = \frac{R \,.\, b^3}{6 \,.\, L} \qquad (\zeta)$$

$$f = \frac{4\, P \,.\, L^3}{E \,.\, b^4} \qquad (\eta)$$

α das Verhältniß des franz. Kilogramms zu dem Pfundgewichte P_1 irgend eines Staates

β das Verhältniß des Meters zu dem Fußmaaße F_1 desselben Staates

und $L_1 V_1 M_1$ dasselbe im Fußmaaße des betreffenden Staates, was in den obigen Gleichungen dieselben unaccentuirten Buchstaben im metrischen franz. Maaß ausdrücken,

so ist

$$P = \frac{P_1}{\alpha}; \; L = \frac{L_1}{\beta}; \; V = \frac{V_1}{\beta} \text{ und } M = \frac{M_1}{\beta^4},$$

substituirt man diese Werthe in den obigen Gleichungen, so erhält man

Wird ein prismatischer Körper, dessen Querschnitt ein Quadrat ist, so gelegt, daß eine der Diagonalen derselben vertikal steht (Fig. 205), so ändert sich zwar der Werth von f nicht, dagegen aber derjenige von P, weil in der Grundgleichung (α)

$$P_1 = \frac{\alpha}{\beta^2} . R \times \frac{M_1}{L_1 . V_1} \qquad (\alpha_1)$$

$$f_1 = \frac{P_1 . L_1}{3 \frac{\alpha}{\beta^2} . E . M_1} \qquad (\beta_1)$$

Man ersieht hieraus, daß man nur die, in obiger Tafel angegebenen, Zahlenwerthe von E und R mit $\frac{\alpha}{\beta^2}$ zu multipliciren braucht, um mittelst der Gleichungen (α) und (β) die Belastung und Biegung in Pfunden und Fußen desjenigen Staates, für welche man das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta^2}$ angenommen hat, zu erhalten.

Für Preußen ist

$\alpha = 2{,}1381$; $\beta = 3{,}1862$; folglich $\frac{\alpha}{\beta^2} = 0{,}2106$

Für Östreich ist

$\alpha = 1{,}7857$; $\beta = 3{,}1634$; folglich $\frac{\alpha}{\beta^2} = 0{,}1784$

Für Bayern ist

$\alpha = 1{,}7857$; $\beta = 3{,}1634$; folglich $\frac{\alpha}{\beta^2} = 0{,}1521$

Für Sachsen *) ist

$\alpha = 2{,}0000$; $\beta = 3{,}5312$: folglich $\frac{\alpha}{\beta^2} = 0{,}1604$

Für Würtemberg ist

$\alpha = 2{,}1380$; $\beta = 3{,}4905$; folglich $\frac{\alpha}{\beta^2} = 0{,}1755$

*) Das hier verstandene sächsische Pfund ist das neue Zollpfund = $\frac{1}{2}$ Kilogramm.

$V = \frac{b}{2} \sqrt{2}$ wird, das Trägheitsmoment M aber ungeändert bleibt. Man hat also

$$P = \frac{R \cdot b^4}{12 \cdot L \cdot \frac{b}{2} \sqrt{2}} = \frac{R \cdot b^3}{6 \sqrt{2} \cdot L}$$

Wir folgern daraus, daß ein prismatischer Körper von quadratischem Querschnitt, der so gelegt wird, daß zwei seiner Kanten in einer Verticalebene sich befinden, einen geringern Widerstand besitzt, als wenn derselbe mit einer seiner Seitenflächen horizontal liegt und zwar in dem Verhältniß von $1 : \sqrt{2}$. oder $1 : 1,4142 \ldots$.

Ist der Querschnitt des Körpers eine Kreisfläche (Fig. 206) und der Halbmesser derselben gleich r, so wird $V = r$ und das Trägheitsmoment $M = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$,

daher

$$P = \frac{R \cdot \pi \cdot r^3}{4 \cdot L} \qquad (\vartheta)$$

$$f = \frac{4 P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot r^4} \qquad (\varkappa)$$

Vergleicht man die in (δ, η und ϑ) enthaltenen Werthe von P mit einander, so ergiebt sich, daß

der Widerstand eines prismatischen Körpers proportional mit seiner Breite und mit dem Quadrat seiner Höhe zunimmt, dagegen proportional mit der Zunahme seiner Länge abnimmt.

Wir ersehen daraus, daß, wenn ein prismatischer Körper von gegebenem Volumen den größten Widerstand bei gegebener Länge besitzen soll, es vortheilhaft ist, ihm die möglich größte Höhe zu geben, wobei man freilich nicht unberücksichtigt lassen darf, ihn auch nicht zu schmal zu machen, weil sonst leicht durch eine geringe Veranlassung seine vertikalen

Seitenflächen in eine horizontale Lage verdrückt werden können. Gewöhnlich nimmt man — namentlich bei Hölzern, wenn aus einem Stamme ein rechtwinkeliger prismatischer Körper, der den größtmöglichen Widerstand (oder Tragkraft) besitzt, ausgehauen oder ausgeschnitten werden soll, — das Verhältniß der Breite zur Höhe wie 5:7 (Fig. 207) an. Wird die Breite dennoch in einem kleinen Verhältniß zur Höhe angenommen, so versieht man die vertikalen Seitenflächen mit Rippen (Fig. 208). Die in der Mitte angebrachten Rippen tragen zwar wenig zur Vergrößerung der Tragkraft bei, dagegen desto mehr diejenigen, welche man ober- und unterhalb ansetzt, wie wir in Verfolg unserer Betrachtungen über den Widerstand der Körper ersehen werden.

Ein Beispiel wird nun die Anwendung der vorstehenden Gleichungen anschaulich machen.

Die Seite eines an dem einen Ende befestigten eichenen Balkens, dessen Querschnitt ein Quadrat ist, soll bestimmt werden, wenn derselbe an dem freien Ende eine Last von 1785 Wiener Pfund tragen soll und $6\frac{2}{3}$ Wiener Fuß lang ist.

In diesem Falle ist aus (ζ)

$$b^3 = \frac{6 \,.\, P \,.\, L}{R}$$

und da Oestreichisches (Wiener) Maaß und Gewicht zu Grunde gelegt ist, so muß R, dessen Werth (siehe Taf. Seite 225) gleich 850100 ist, nach (Anmerk. Seite 242) mit 0,1784 multiplicirt werden; man hat also

$$b = \sqrt[3]{\frac{6 \,.\, 1785 \,.\, 6\frac{2}{3}}{0{,}1784 \,.\, 850100}} = 0{,}764 \text{ Wien. Fuß}$$

oder beinahe $9\frac{1}{4}$ Zoll als gesuchte Seite des Balkens.

72. Körper von gleichem Widerstande. — Wenn ein prismatischer Körper mit dem einen Ende befestigt ist und durch eine am freien Ende auf seine Längenrichtung senkrecht wirkende Kraft gebogen wird, so ist es augen-

scheinlich, daß die Stelle, welche am meisten dem Bruche ausgesetzt ist, sich da, wo der Körper befestigt ist, befindet. Wenn er an dieser Stelle einen hinreichenden Widerstand besitzt, so wird er dagegen an jeder andern Stelle stärker, als es nothwendig ist, sein. Sucht man nun einem Körper eine solche Form zu geben, daß dessen Widerstand an jeder Stelle derselbe sei, so nennt man einen Solchen, **einen Körper von gleichem Widerstande.**

Aus (α) erhalten wir für eine gegebene Länge L

$$\frac{M}{V} = \frac{P}{R} \cdot L.$$

In dieser Gleichung sind für ein und denselben Körper, P und R constante Größen, und wenn sich daher in dem zweiten Theil der Gleichung L verändert, so muß sich nothwendigerweise auch $\frac{M}{V}$ verändern. Bezeichnen wir nun für die Länge x das Trägheitsmoment mit m und den Abstand der entferntesten Faser mit v, so ist auch

$$\frac{m}{v} = \frac{P}{R} \cdot x.$$

Diese Gleichung enthält das Gesetz, nach welchem die Querschnitte des Körpers, vom Angriffspunkt der Kraft P an gerechnet, zunehmen müssen, damit derselbe in seiner ganzen Länge gleichen Widerstand leiste.

Sind die Querschnitte des Körpers Rechtecke und bezeichnet man die Breite und Höhe desjenigen, welches um die Größe x von dem Angriffspunkt der Kraft P entfernt ist, mit z und y, so ist

$$m = \frac{z y^3}{12} \ ; \ v = \frac{y}{2}$$

folglich

$$\frac{m}{v} = \frac{z y^2}{6}$$

oder $$\frac{zy^2}{6} = \frac{P}{R} \cdot x.$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

a. der Körper hat durchaus eine gleiche Höhe, dagegen verändert sich mit dem Abstand vom Angriffspunkt der Kraft P seine Breite.

b. Die Breite des Körpers bleibt durchaus dieselbe, dagegen verändert sich die Höhe.

Im ersten Falle ist

$$z = \frac{6P}{R \cdot y^2} \cdot x; \qquad (\alpha)$$

man ersieht hieraus, daß die Breite mit ihrem Abstand von dem Angriffspunkt der Kraft zunimmt, oder der Körper die Form, wie Figur 209, hat und die größte Breite $ab = \frac{6 \cdot P}{R \cdot y^2} \cdot L$ ist.

Im zweiten Falle ist

$$y^2 = \frac{6P}{R \cdot z} \cdot x. \qquad (\beta)$$

Hier nimmt also das Quadrat der Höhe proportional mit den Abständen der Querschnitte von dem Angriffspunkt der Kraft P zu. Diese Eigenschaft gehört aber der gemeinen Parabel, die ihren Scheitel in dem Angriffspunkt der Kraft hat und deren Axe mit jener des Körpers zusammen fällt, an. Daher ist der Körper in diesem zweiten Falle durch eine Parabel begrenzt, die auf folgende Weise construirt werden kann. Es sei ABCD die ursprüngliche Form des rechtwinkeligen, prismatischen Körpers, der in einen Körper von gleichem Widerstande verwandelt werden soll; man theile die beiden Seiten AC und CD, jede in dieselbe Anzahl gleicher (hier in 3) Theile Aa, ab, bC und Da_1, a_1b_1, b_1C, ziehe aus a und b Parallelen mit AB und aus B die Geraden Ba_1, Bb_1, so schneiden diese die vorher gezogenen Parallelen in m und n. Diese Punkte liegen in einer Pa-

rabel *), eine durch C, m, n, B gezogene krumme Linie ist die gesuchte Begrenzung und folglich ACmnB das Profil des Körpers, der durchaus gleichen Widerstand besitzt. Hätte man statt der Linie CD diejenige AB eingetheilt und die Linien, welche auf den Parallelen die in der Parabel liegenden Punkte angeben, von D aus gezogen, so würde der Körper von oben durch die Parabel begrenzt sein, wie es Fig. 211 zeigt. Wenn endlich das Rechteck ACDB durch die Linie EF in zwei gleiche Theile getheilt und sowohl für ADFE, als für EFDC die Begrenzungskurve auf die vorhin angegebene Weise bestimmt wird, so ist dann $AmnFm_1n_1C$ das Profil des Körpers. Jede von diesen drei verschiedenen Formen besitzt in jedem ihrer Querschnitte denselben Widerstand und es kommt auf anderweitige Bedingungen an, welche von ihnen man in einem gegebenen Fall anwenden muß. **)

---

*) Daß diese Punkte wirklich in einer Parabel liegen, läßt sich auf folgende Weise darthun: Man fälle von einem der Punkte, z. B. von m zu AB (Fig. 210) eine Senkrechte mp, bezeichne Bp mit X und pm mit Y, so ist:

$$Ab : AC = Da_1 : DC$$
$$Bq : BD = qm : Da_1$$

oder $Ab \times Bq : AC \times BD = qm : DC.$

Es ist aber $Ab = Bq = Y$
$$AC = BD = h$$
$$mq = X \text{ und } DC = L$$

folglich $Y^2 : h^2 = X : L$

oder $$Y^2 = \frac{h^2}{L} . X$$

welches die Gleichung der Parabel ist, wenn man darin den Paramoter $\frac{h^2}{L}$ gleich p setzt.

**) Häufig begnügt man sich damit, statt dieser durch eine Kurve begrenzten Form ein Trapez ABGf (Fig. 212) zu substituiren. Wenn nemlich in A zu AB eine Senkrechte errichtet und aus G an die Parabel eine Tangente gezogen wird, so schnei-

Sind die Querschnitte des Körpers Kreisflächen und bezeichnet man den Halbmesser derjenigen, die um die Größe x von dem Angriffspunkt der Kraft P entfernt ist, mit r, so ist dann

$$m = \frac{\pi r^4}{4} \text{ und } v = r$$

daher
$$\frac{m}{v} = \frac{\pi . r^3}{4}$$

oder
$$\frac{\pi . r^3}{4} = \frac{P}{R} . x$$

und hieraus
$$r^3 = \frac{4 . P}{\pi . R} . x.$$

Es nehmen also hier die Würfel der Halbmesser proportional mit den Abständen der Querschnitte von dem Angriffspunkt der Kraft zu. Um in diesem Falle die Gestalt des Körpers zu erhalten, verfährt man am einfachsten so, daß man zuerst den constanten Faktor $\frac{4P}{\pi . R}$ berechnet, hierauf für x nach einander $\frac{1}{4} . \frac{1}{2} . 1 . 2$ rc. setzt, oder mit andern Worten: den Zahlenwerth von $\frac{4P}{\pi . R}$ nach einander mit $\frac{1}{4} . \frac{1}{2} . 1 . 2$ rc. multiplicirt und von diesen Produkten mittelst einer Tafel für Kubikwurzeln die auf einander fol-

---

det diese jene in f, und der Eigenschaft dieser Kurve zu Folge ist $2f = \frac{1}{2}$ BG. Man gibt also den parallelen Seiten des Trapezes solche Dimensionen, daß sie sich zu einander wie 1:2 verhalten, und da die Parabelfläche ABGA zwei Drittel, das Trapez ABGf drei Viertel von dem Flächeninhalt des umschriebenen Rechtecks ABGF beträgt, so wird zwar durch Substituirung des Trapezes $\frac{1}{8}$ von dem für die Parabelform erforderlichen Material mehr verwendet, dagegen in Vergleichung gegen das umschriebene Rechteck $\frac{1}{4}$ erspart.

genden Werthe von r bestimmt. Hierauf theilt man die Länge AB (Fig. 212) so ein, daß $Aa = \frac{1}{4}$. $Ab = \frac{1}{2}$. $Ac = 1$ ꝛc. ist, errichtet in diesen Punkten Senkrechte zu AB, macht diese so groß, wie die vorher für r gefundenen Werthe und verbindet die so erhaltenen Punkte A, a, b, ꝛc. durch eine Kurve, welche die gesuchte Begrenzung sein wird.

73. Formveränderung und Torsions-Widerstand eines an dem einem Ende befestigten und an dem andern der Einwirkung einer Kraft unterworfenen, prismatischen Körpers. — Denken wir uns einen bei ADBC befestigten, prismatischen Körper, dessen freies Ende mit einem Hebel CB verbunden ist. Wirkt nun auf diesen die Kraft P, so wird jener um eine geringe Größe verdreht, wodurch alle Längenfasern des Körpers aus ihrer ursprünglichen Lage mehr oder weniger gebracht werden, je nachdem sie entfernter oder näher der Are derselben liegen. Die dadurch erzeugte Formveränderung ist von der Art, daß jedes Element einer Längenfaser in der Richtung eines Kreisbogens verrückt wird; und zwar dasjenige nur, welches von dem befestigten Theil am weitesten entfernt ist oder das in der Ebene der Richtung der Kraft P liegt, wird den größten Kreisbogen, alle vorhergehenden hingegen werden um so kleinere Kreisbögen beschreiben, je näher sie dem befestigten Theil liegen, und das Element, das mit diesem zusammenfällt, wird seine Stelle gar nicht verändern. Wegen der Verbindung, in welcher jede einzelne Längenfaser mit den übrigen steht, kann sich keine über die benachbarten hinwegschieben oder auf- oder abwärts verrücken, sondern alle müssen in der bezeichneten Weise zugleich ihre Lage verändern. Daher werden die Mittelpunkte der von den einzelnen Elementen einer jeder Längenfaser beschriebenen Kreisbögen alle in der Are EC liegen, was zu der Folgerung berechtigt: daß der Widerstand des äussersten Endes einer Faser dem von diesem beschriebenen Kreisbogen proportional ist. Ferner wird dieser Widerstand

um so größer sein, je dicker die Faser ist, dagegen sich derselbe proportional mit der Länge der Faser oder der des Körpers vermindern.

Legt man nun durch das freie Ende des Körpers und senkrecht zu dessen Axe eine Ebene, und bezeichnet den in dieser Ebene gemessenen Winkel der Verdrehung für den Halbmesser = 1 mit φ, die Länge des prismatischen Körpers mit L, die Länge des Hebelarmes, an dem die Kraft P wirkt, mit a, das Trägheitsmoment von dem Querschnitt des Körpers mit M, den Abstand zwischen der entferntesten Faser und der Axe mit r_o und den auf Drehung sich beziehenden Torsions-Coefficienten mit t, so wie den Coefficienten des Widerstandes der Torsion mit T, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{T \, . \, M}{a \, . \, r_o} \quad \ldots \quad (\alpha) \\ \varphi &= \frac{a \, . \, L \, . \, P}{t \, . \, M} \quad \ldots \quad (\beta) \end{aligned}\right\} \; ^{*)}$$

*) Zum bessern Verständniß dieser beiden Gleichungen betrachte man zuvor eine einzelne Faser, nenne ihren Querschnitt q, ihren Abstand von der Axe r und ihren Widerstand p, so ist der Kreisbogen, welchen ihr äußerstes Ende beschreibt, $r \, . \, \varphi$. Weil nun p dem beschriebenen Kreisbogen und dem Querschnitt der Faser gerad, hingegen der Länge derselben umgekehrt proportional ist, so hat man

$$r = t \, . \, \frac{r \, . \, \varphi \, . \, q}{L}$$

folglich das Moment dieses Widerstandes

$$\frac{t \, . \, \varphi}{L} \, . \, q \, . \, r^2$$

und die Summe dieser Momente, welche dem Moment der Kraft P gleich sein müssen

$$\frac{t \, . \, \varphi}{L} \, \Sigma q \, . \, r^2$$

oder

$$a \, . \, P = \frac{t \, . \, \varphi}{L} \, \Sigma q \, . \, r^2.$$

und die auf die Drehung verwendete Arbeit

$$\frac{a \cdot L \cdot P^2}{t \cdot M} \qquad (\gamma)$$

$q \cdot r^2$ ist aber das Trägheitsmoment von dem Querschnitt der Faser in Bezug auf die Axe des Körpers. Wenn man daher das Trägheitsmoment von dem ganzen Querschnitt des Körpers mit M bezeichnet, so ist

$$\Sigma q \cdot r^2 = M$$

folglich
$$a \cdot P = \frac{t \cdot \varphi}{L} \cdot M$$

oder
$$\varphi = \frac{a \cdot L \cdot P}{t \cdot M}.$$

Um, wie oben, die Gleichung für P unabhängig von φ und L zu erhalten, bezeichne man den Abstand zwischen der entferntesten Faser und der Axe des Körpers mit r_0 und den in der Tangente des mit r_0 beschriebenen Kreisbogens statt findenden — die Elasticitätsgrenze nicht überschreitenden und auf die Flächeneinheit bezogenen — Widerstand mit T, so ist in dem Querschnitt der äussersten Faser die Spannung gleich qT, und weil sich die Widerstände der andern Fasern wie ihre Abstände von der Axe verhalten, so ist für den Abstand r der Widerstand

$$\frac{T \cdot q \cdot r}{r_0}$$

das Moment desselben

$$\frac{T}{r_0} \cdot q \cdot r^2$$

und die Summe dieser Momente

$$\frac{T}{r_0} \Sigma q \cdot r^2,$$

oder da $\Sigma q \cdot r^2 = M$ und die Summe dieser Momente dem Moment der Kraft P gleich sein muß

$$a \cdot P = \frac{T}{r_0} \cdot M,$$

oder
$$P = \frac{T \cdot M}{a \cdot r_0}$$

wie in (α).

Bei den am häufigsten in der Anwendung vorkommenden Fällen, wo ein Körper der Einwirkung einer Torsionskraft ausgesetzt ist, ist der Querschnitt desselben entweder ein Quadrat oder ein Kreis.

Ist der Querschnitt des Körpers ein Quadrat, dessen Seite $= b$, so ist das Trägheitsmoment $M = \frac{b^4}{6}$ und der Abstand $r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$,

daher

$$P = \frac{T \cdot \frac{b^4}{6}}{a \cdot \frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{T \cdot b^3 \cdot \sqrt{2}}{6a} = 0{,}2357 \cdot \frac{T \cdot b^3}{a} \; ^{*)} \; (\delta)$$

$$\text{und } \varphi = \frac{a \cdot L \cdot P}{t \cdot \frac{b^4}{6}} = \frac{6L}{b^4} \cdot \frac{aP}{t} \qquad (\varepsilon)$$

---

*) Wäre der Querschnitt des Körpers ein Rechteck, dessen horizontale Seite $= b$, die vertikale $= h$ ist, so hätte man für das Trägheitsmoment den Ausdruck

$$\frac{b^3h + bh^3}{12} \text{ und } r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + h^2}$$

folglich das Moment der Kraft P oder

$$a.P = T \cdot \frac{b^3h + bh^3}{6\sqrt{b^2 + h^2}} \qquad (1)$$

Allein man hat gefunden, daß in diesem besondern Falle die Widerstände der einzelnen Fasern nicht genau ihren Abständen von der Axe des Körpers proportional sind und daß eigentlich

$$a.P = T \cdot \frac{b^2 \cdot h^2}{3\sqrt{b^2 + h^2}}$$

Ist hingegen der Querschnitt des Körpers ein Kreis, dessen Halbmesser $= r$, so ist das Trägheitsmoment

$M = \frac{\pi r^4}{2}$ und der Abstand $r_0 = r$;

daher

$$P = \frac{T \cdot \frac{\pi r^4}{2}}{a \cdot r} = \frac{\pi \cdot T \cdot r^3}{2 \cdot a} = 1{,}5708 \cdot \frac{T \cdot r^3}{a} \qquad (\zeta)$$

$$\varphi = \frac{a \cdot L \cdot P}{t \cdot \frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2L}{\pi \cdot r^4} \cdot \frac{a \cdot P}{t} \; {}^{*)} \qquad (\eta)$$

Für t und T nimmt man je nach der Natur der Substanz des Körpers die Zahlenwerthe aus der, Seite 225 enthaltenen, Tafel. Jedoch darf man dabei nicht vergessen, daß, wenn der Querschnitt des Körpers eine Kreisfläche ist, der

---

und

$$\varphi = \frac{a \cdot P}{t} \cdot \frac{(b^2 + h^2)\, L}{b^3 \cdot h^3}$$

ist.

Den Beweis für diese statt findende Differenz hier zu führen, liegt jedoch ausser den Grenzen dieses Werkes.

*) Sollen obige, in ($\alpha - \eta$) enthaltene Gleichungen bei Berechnungen angewendet werden, wo

die Einheit des Gewichtes das Pfund
„ „ „ Längenmaaßes der Fuß

ist, so darf nur t oder T mit dem (Anmerkung Seite 242) Zahlenwerthe von $\frac{\alpha}{\beta^2}$ multiplicirt werden, um P in Pfunden oder φ für den Halbmesser $= 1$ zu erhalten. Welche Zahlenwerthe für $\frac{\alpha}{\beta^2}$ zu setzen sind, ergibt sich daraus, ob Östreichisches, Preußisches ꝛc. Maaß und Gewicht zu Grund gelegt ist.

Zahlenwerth T um $\frac{1}{5}$ vergrößert werden muß. Bei der Betrachtung der Wellen in dem folgenden Abschnitt werden wir zeigen, wie in besondern Fällen die vorstehenden, auf die Torsionskraft des Körpers sich beziehenden, Formeln zu gebrauchen sind.

74. Widerstand vertikal stehender und oberhalb belasteter, prismatischer Körper. — Zu dem, was bereits im Paragraph 70 dieses Abschnittes über die Widerstände vertikal stehender und oberhalb belasteter, prismatischer Körper gesagt worden ist, müssen wir hier noch Dasjenige, was in Bezug auf eine solche Belastung eines Körpers durch die Erfahrung ermittelt worden ist, beifügen. Wir unterscheiden daher den Fall, wo ein Körper nur eine geringe Höhe hat, von demjenigen, wo diese sehr beträchtlich ist.

In beiden Fällen widersteht der Körper dem Zerdrücken oder dem Zerknicken mit um so geringerer Kraft, je höher derselbe ist, und seine Dimensionen können für eine gegebene Belastung, welche jeder Quadratmillemeter seines Querschnittes zu tragen im Stande ist, mittelst nachstehender Tafel bestimmt werden.

Tafel der Widerstände, welche Körper dem Zerdrücken oder Zerknicken entgegensetzen. *)

Höhen.	Gattung der Körper.	Maximum der Belastung für jeden Quadratmillemeter des Querschnittes.
		Kilogramme.
1 bis 2mal so hoch als die Dicke.	Eiche oder Tanne	0,3
	Schmiedeeisen	10
	Gußeisen	20
4mal so hoch als die Dicke.	Gußeisen	13
8 — so hoch als die Dicke.		10
12 — " "	Holz	0,25
	Schmiedeeisen	6,25
24 — " "	Holz	0,15
	Schmiedeeisen	5.—
36 — " "	Gußeisen	1,33

---

*) Um mittelst dieser Tafel die in Pfunden ausgedrückten Belastungen eines Quadratzolls für irgend ein zu Grunde gelegtes Maaß und Gewicht zu erhalten, muß man:
wenn α die Zahl der Pfunde irgend eines Staates, welche ein Kilogramm enthält und
β_1 " " " Millemeter, die einem Längenzoll desselben Staates gleich sind,
bezeichnet, die Zahlen der dritten Colonne mit $\alpha\beta_1^2$ multipliciren.
Für preuß. Maaß und Gewicht ist $\alpha\beta_1^2 = 1462$
" östreich. " " " " $\alpha\beta_1^2 = 1239$
" bayer. " " " " $\alpha\beta_1^2 = 1057$
u. s. w.



Die zwischen diesen Zahlen liegenden Fälle sind nicht unmittelbar durch Versuche ermittelt worden, man kann sie jedoch leicht durch eine einfache Proportion ermitteln.

In dem Falle, wo die Länge des Körpers 20mal dessen Dicke (oder kleinste Seite) übersteigt, wendet man die folgenden Gleichungen an, um das Maximum der Belastung Q, welche der Körper zu tragen im Stande ist, zu erhalten.

Für Körper, deren Querschnitte Rechtecke oder Kreise sind, hat man

1.) für ein Rechteck

$$Q = 0{,}823 \cdot \frac{a \cdot b^3}{L^2} \cdot E'; \qquad (\alpha)$$

2.) für einen Kreis

$$Q = 7{,}757 \cdot \frac{r^4}{L^2} \cdot E' \text{ *)} \qquad (\beta)$$

In diesen Formeln bezeichnet a die Breite und b die Dicke, wenn der Querschnitt ein Rechteck ist; r den Halbmesser, wenn der Querschnitt ein Kreis ist und L die Länge in beiden Fällen. Alle diese Dimensionen sind in Metern ausgedrückt. Will man sie in Fußen und die Belastung Q in Pfunden ausdrücken, so muß man E' mit den, in der Anmerkung Seite 242, gegebenen Zahlen-Werthen von $\frac{\alpha}{\beta^2}$ multipliciren. Ferner ist in den beiden obigen Gleichungen (α) und (β)

---

*) Allgemein ist

$$Q = \frac{\pi^2 \cdot M}{L^2} \cdot E' \qquad (1)$$

wenn unter M das Trägheitsmoment von dem Querschnitte des Körpers in demselben Sinne, wie im Paragraph 71 genommen, verstanden wird. Da nun für einen rechtwinkeligen

für Holz $E' = \frac{E}{10} = 100\,000\,000$ Kilogr.

„ Schmiedeisen $E' = \frac{E}{4} = 5\,000\,000\,000$ „

„ Gußeisen $E' = \frac{E}{5} = 2\,000\,000\,000$ „

Querschnitt $M = \frac{ab^3}{12}$ und für einen kreisförmigen $M = \frac{\pi r^4}{4}$ ist, so erhält man, wenn diese Werthe für M in (1) substituirt werden, die beiden obigen Gleichungen.

Da wir bei unsern Lesern keine Vorkenntnisse in der Analysis voraussetzen, so können wir auch nicht strenge nachweisen, daß

$$Q = \frac{\pi^2 . M}{L^2} . E'$$

ist; jedoch wollen wir den Weg, um zu diesem Ausdruck zu gelangen, andeuten.

Denken wir uns nemlich den in der Anmerkung zu Paragraph 71 betrachteten Körper in vertikaler Stellung, wie es Fig. 213 zeigt, fällen von D eine Senkrechte DC, welche die Richtung des Drucks der in D aufliegenden Last Q andeutet und zu dieser von m eine Senkrechte $mm_{,,}$; setzen eben so, wie in Fig. 200 $Am_1 = x$; $m_1m = y$; $AB = L$ und ausserdem noch $AC = b$, so ist das Moment der Last gleich $(b - y)\,Q$; daher nach (Anmerk. p. 237 [2])

$$(b - y)\,Q = \frac{E . M}{\varrho} \qquad (2)$$

ϱ ist aber (Anm. p. 238) gleich $\frac{2 . k^2}{qu}$; setzen wir hierin, wie es dort angenommen ist, $k = \frac{x}{n}$, so erhält man

$$\varrho = \frac{2\,x^2}{n^2 . qu}$$

75. Einfluß der Stützen auf den Widerstand der Materialien. — Die im vorigen Paragraphen gegebenen Vorschriften zur Bestimmung der Größe der Last, welche vertikal stehende, prismatische Körper zu tragen vermögend sind, beziehen sich nur auf den Fall, wo der Körper sich zwar mit seinen beiden Enden gegen andere unverrückbare feste Körper stemmt, aber selbst nicht mit jenen in diesen befestigt ist, so daß sowohl sein oberes,

---

oder da $n . qu = qz$ ist

$$\varrho = \frac{2 x^2}{n . qz}$$

Diesen Werth für ϱ in (2) substituirt, erhält man

$$(b-y)\, Q = \frac{E . M}{2 . x^2} . n . qz$$

oder
$$Q = \frac{E . M}{2 . x^2} . n . \frac{qz}{b-y} \qquad (3)$$

In dieser Gleichung soll nun $\frac{qz}{b-y}$ nmal genommen werden; hiebei ist jedoch zu bemerken, daß dieses nmal nehmen so zu verstehen ist: daß für qz und b—y die von A (Fig. 213) auf einander folgenden, diesen Größen entsprechenden Werthe gesetzt und hierauf summirt werden. Aber gerade diese Operation, wenn man sie auf die eben bezeichnete Weise ausführen wollte, setzt das Vertrautsein mit der analytischen Methode voraus. Wird auf diese oder irgend eine andere Weise $n . \frac{qz}{b-y}$ bestimmt, hierauf zuerst $y = b$ und dann $b = o$ gesetzt, d. h. angenommen, daß die Richtung von dem Druck der Last durch den Punkt A (Fig. 213) gehe, so verwandelt sich $n . \frac{qz}{b-y}$ in die constante Größe $2\pi^2$; wenn man daher in (3) für x die Größe L, und $2\pi^2$ für $n . \frac{qz}{b-y}$ substituirt, so geht (3) in die in (1) angegebene, allgemeine Gleichung über.

als sein unteres Ende von der ursprünglichen Lage seiner Axe sich zu entfernen das Vermögen besitzt. Dies findet z. B. bei den Lenkstangen der Krummzapfen und bei hölzernen Pfosten, die stumpf auf einer Bodenfläche aufsitzen und auf gleiche Weise mit ihrem oberen Ende eine Last stützen, statt. Wenn aber das eine Ende des Körpers so befestigt ist, daß es auf keinerlei Weise die ihm gegebene Lage verändern kann, wenn es z. B. eingemauert oder in der Aushöhlung eines andern unverrückbaren Körpers fest eingekeilt, dagegen das andere Ende frei ist, so wird derselbe eine doppelt so große Last als diejenige, welche die im vorhergehenden Paragraphen enthaltenen Formeln (α) und (β) angeben, zu tragen im Stande sein. Endlich darf die Belastung viermal so groß als die durch die erwähnten Formeln erhaltene sein, wenn beide Enden des Körpers auf die vorhin angezeigte Art befestigt werden, oder wenn dieselben unbefestigt sind, dagegen der Körper in der Mitte seiner Länge auf eine unverrückbare Weise festgehalten wird. Im Allgemeinen kann man annehmen, daß der Widerstand eines auf die bezeichnete Weise zum Tragen einer Last angebrachten Körpers der Zahl der Biegungs- oder Brechungs-Querschnitte desselben, welche sich in Folge der Anordnung seiner Stützen oder seiner Befestigung ergeben, proportional ist. Wenn z. B. die äussersten Enden **A** und **B** (Fig. 214) des betrachteten Körpers nicht befestigt sind, so wird die auf ihn von oben nach unten drückende Belastung ihn in seiner Mitte krümmen, und diese Stelle ist der einzige Querschnitt, wo der Bruch — insofern solcher statt fände — geschehen würde, und dieser Fall ist derjenige, auf welchen sich die in der Anmerkung des vorigen Paragraphen enthaltene allgemeine Formel (1) bezieht. Wenn hingegen das Ende **B** (Fig. 215) auf die oben bezeichnete Weise bis zu einer gewissen Tiefe **BC** befestigt ist, so wird in dem, ausserhalb der Befestigung befindlichen, freien Theil durch die aufliegende Belastung das Bestreben erregt, sich in der Mitte **O** zu krümmen, wodurch aber an der zwischen dem freien und befestigten Theile des Körpers befindlichen Grenze **C** eine

Biegung gebildet wird. Es giebt also in diesem Falle zwei Biegungs- und Brechungsquerschnitte, Einen in **O**, den Andern in **C**; man nimmt nun leicht wahr, daß die Belastung das Doppelte von der durch den Calcul erhaltenen ist. Sind die beiden Enden **A** und **B** (Fig. 216) befestigt, so ergeben sich drei Biegungs- oder Brechungsquerschnitte **D**, **O** und **C**, und die Belastung wird abermals verdoppelt oder ist das Vierfache von der, welche die Formeln angeben. Dasselbe ist der Fall, wenn der Körper in seiner Mitte **O** (Fig. 217) fest gehalten wird; er kann dann als aus den beiden Hälften **AO** und **OB** zusammengesetzt betrachtet werden, von denen jede durch die Belastung das Bestreben erlangt, sich in ihrer Mitte zu krümmen, und es ergeben sich also nur in diesen beiden Stellen Biegungs- oder Brechungsquerschnitte; da aber die Pfeile der Einbiegungen ebenfalls nur halb so groß, als in dem vorher betrachteten Falle sind, und diese das Moment der Belastung messen, so ist augenscheinlich, daß auch in diesem Falle die Belastung das Vierfache von derjenigen betragen wird, die der Körper, wenn seine Mitte nicht befestigt ist, zu tragen im Stande ist.

Analoge Betrachtungen sind auch auf horizontal liegende, auf zwei Stützen ruhende, prismatische Körper anwendbar. Wenn z. B. ein solcher Körper mit seinen beiden Enden **A** und **B** (Fig. 218) auf schneidigen Unterlagen ruht oder dem zu Folge das Bestreben besitzt, auf denselben vor- oder rückwärts gleiten zu können, und in seiner Mitte durch ein Gewicht $2P$ belastet ist, so ist er ganz in demselben Zustande, als wenn er in der Mitte befestigt wäre und auf jedes seiner beiden freien Ende die Kraft P wirkte. *)

---

*) Da dieser Fall von besonderer Wichtigkeit für die Anwendung ist, so wollen wir ihn auch in der Art betrachten, als wenn die Belastung nicht gerade in der Mitte angebracht ist. Es sei also AB (Fig. 219) ein in C unterstützter, prismatischer Körper (dessen Gewicht unbeachtet gelassen werde), an dessen beiden Enden die Kräfte P' und P'' vertikal abwärts wirken;

76. Widerstand ausgehöhlter oder mit Rippen versehener Körper. — Wenn die Theile einer Maschine, welche der Einwirkung einer beträchtlichen Kraft zu widerstehen haben, aus Gußeisen angefertigt werden, so macht man sie, um Material zu sparen und doch ihren Widerstand nicht zu mindern, entweder hohl oder

---

soll nun P′ und P″ in Bezug auf den Punkt C im Gleichgewicht sein, und der Druck in C mit Q bezeichnet werden, so hat man der Eigenschaft des Hebels zu Folge

$$P' \times AC = P'' \times CB$$

und $$P' + P'' = Q.$$

Wird nun der Körper in C befestigt gedacht, so ist nach Paragraph 71 (α) das Moment von dem Flexionswiderstand in C gleich

$$\frac{R \cdot M}{V}$$

Da nun $P' \times CA$ und $P'' \times CB$ die Momente der in A und B angebrachten Kräfte sind, so ist:

$$P' \times AC = \frac{R \cdot M}{V}$$

$$P'' \times CB = \frac{R \cdot M}{V}$$

und folglich $$P' \times P'' = \frac{R \cdot M}{V}\left(\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}\right)$$

Unterstützt man nun den Körper in A und B (Fig. 220) und bringt die Belastung $Q = P' + P''$ an, so wird dadurch in dem Gleichgewichtszustand nichts geändert.

Daher ist

$$Q = \frac{R \cdot M}{V} \cdot \frac{L}{CA \times CB}, \qquad (1)$$

wenn man $AC + CB = L$ setzt; daher das Moment von dem Flexionswiderstand gleich $\frac{R \cdot M}{V}$ und

$$\frac{R \cdot M}{V} = \frac{Q \cdot (CA \times CB)}{L}. \qquad (2)$$

man versieht sie an angemessenen Stellen mit Rippen. In solchen Fällen muß man, um die oben aufgestellten, allgemeinen Formeln mit Erfolg anwenden zu können, von den Querschnitten dieser Körper die Trägheitsmomente anzugeben im

---

Befindet sich der Punkt C in der Mitte zwischen A und B, so ist $AC = CB = \frac{L}{2}$ folglich

$$LQ = 4 \cdot \frac{R \cdot M}{V} \qquad (3)$$

d. h. der Flexionswiderstand eines an beiden Enden auf Stützen frei aufliegenden, prismatischen Körpers ist viermal so groß, als derjenige desselben Körpers, wenn dieser an dem einen Ende befestigt und an dem andern belastet wäre.

Sind die beiden Enden des Körpers befestigt, d. h. entweder eingemauert oder in andern unverrückbaren Körpern fest eingekeilt so entstehen durch die in C (Fig. 221) angehängte Belastung Q, in A, B und C Biegungs- oder Brechungsquerschnitte, und die Momente von den, in diesen statt findenden, Flexionswiderständen müssen augenscheinlich einander gleich, und wie vorhin durch $\frac{R \cdot M}{V}$ ausgedrückt, sein. Bezeichnet man die mit denselben im Gleichgewicht befindlichen, in C angebrachten, Kräfte mit P_1, P_2 und P_3, so ist das Moment von

P_1 gleich $P_1 \times AC$

P_2 „ $P_2 \times CB$

P_3 „ $P_3 \times \frac{AC \times CB}{L}$ (nach [2])

daher

$$P_1 \times AC = \frac{R \cdot M}{V} \qquad \text{oder } P_1 = \frac{R \cdot M}{V \times AC}$$

$$P_2 \times CB = \frac{R \cdot M}{V} \qquad „ \quad P_2 = \frac{R \cdot M}{V \times CB}$$

$$P_3 \times \frac{AC \times CB}{L} = \frac{R \cdot M}{V} \qquad „ \quad P_3 = \frac{R \cdot M}{V} \cdot \frac{L}{AC \times CB}$$

Stande sein, zu welchem Zwecke wir in Folgendem von den am häufigsten vorkommenden Formen dieselben, sowie die Werthe von V (71) bestimmen wollen.

Es muß aber $P_1 + P_2 + P_3 = Q$ sein, folglich ist

$$Q = \frac{R.M}{V}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{CB} + \frac{L}{AC + CB}\right)$$

$$= 2 . \frac{R.M}{V} . \frac{L}{AC \times CB} \qquad (4)$$

und wenn der Angriffspunkt der Belastung Q in der Mitte zwischen A und B liegt

$$L . Q = 8 . \frac{R.M}{V} \qquad (5)$$

d. h. der Flexionswiderstand eines mit seinen beiden Enden befestigten, prismatischen Körpers ist achtmal so groß, als derjenige desselben Körpers, wenn dessen eines Ende befestigt und das andere, freie, belastet wäre.

Ist die Last Q auf der Oberfläche des prismatischen Körpers gleichförmig vertheilt, so kann man in dem Falle, wo derselbe an dem einen Ende befestigt ist, sie in dem Schwerpunkt s vereinigt annehmen; mithin ist das Moment der Belastung gleich $Q . \frac{L}{2}$, welches dem Moment des Flexionswiderstandes gleich sein muß, daher ist

$$Q . \frac{L}{2} = \frac{R.M}{V}$$

oder

$$L.Q = 2 . \frac{R.M}{V} \qquad (6)$$

Liegt der Körper mit seinen beiden Enden auf zwei Stützen A und B (Fig. 222), so kann man für einen Augenblick dieselben wegnehmen und ihn dafür in seiner Mitte C unterhalb seines Schwerpunktes unterstützt denken. Dann ist der eine oder andere über die Stütze vorspringende Theil des Körpers mit dem Flexionswiderstande in C im Gleichgewicht. Weil nun der Abstand des Schwerpunktes s von der Stütze C

In Nachstehendem bezeichnet man

das Trägheitsmoment, welches man sucht, mit M;

die Trägheitsmomente von einzelnen Theilen der betrachteten Querschnitte mit m, $m_{,}$, $m_{,,}$ 2c.;

den Abstand zwischen der Are des Körpers und der entferntesten Faser mit V.

I. Ist der Körper ein ausgehöhltes, rechtwinkeliges Prisma, folglich der Querschnitt ein Rechteck ABCD (Fig. 224), von dem das kleinere Rechteck abcd weggenom-

---

gleich $\frac{1}{4}$ L, und die auf AC gleichförmig verbreitete Last gleich $\frac{P}{2}$ ist, so hat man

$$\frac{L}{4} \cdot \frac{P}{2} = \frac{M}{V}$$

oder

$$L.P = 8 \cdot \frac{R.M}{V} \qquad (7)$$

Aus (6) und (7) nimmt man wahr, daß, wenn die Belastung, statt am Ende oder in der Mitte des Körpers angebracht zu sein, gleichförmig über denselben verbreitet ist, dessen Flexionswiderstand sich verdoppelt.

Zuweilen ist es nothwendig, die Größe der Einbiegung eines mit beiden Enden auf Stützen liegenden Körpers anzugeben. Denkt man sich den Körper, anstatt in der Mitte mit dem Gewicht P belastet, an dieser Stelle befestigt, dagegen an seinen beiden Enden die gleichen Kräfte $\frac{P}{2}$ angebracht, so wird dadurch in der die Einbiegung cd (Fig. 223) erzeugenden, Wirkung nichts geändert. cd wird also erhalten, wenn man in ([β] Paragraph 71) statt P und L die Werthe $\frac{P}{2}$ und $\frac{L}{2}$ substituirt; dann erhält man

$$f = \frac{\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3}{3 . E . M} = \frac{P . L^3}{48 . E . M} \qquad (8)$$

men ist, vw die Axe, worauf die Trägheitsmomente bezogen werden und

$$AB = b \quad ; \quad ab = b_1$$
$$DC = h \quad ; \quad dc = h_1$$

so ist: $m = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad ; \quad m_1 = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{folglich} & M = m - m_1 = \frac{b \cdot h^3 - b_1 \cdot h_1^3}{12} \\ \text{und} & V = \frac{h}{2} \end{array}\right\} \quad (1)$$

II. Ist der Körper ein hohler Cylinder, also dessen Querschnitt ein Ring AB (Fig. 225) und bezeichnet man den Halbmesser des äussern Kreises mit r
" " " innern " " r_1

so ist: $m = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad ; \quad m_1 = \frac{\pi \cdot r_1^4}{4}$

folglich das Trägheitsmoment des Ringes in Bezug auf die Axe vw oder

$$\left.\begin{array}{ll} & M = m - m_1 = \frac{\pi (r^4 - r_1^4)}{4} \\ \text{und} & V = r \end{array}\right\} \quad (2)$$

III. Ist der Querschnitt des Körpers ein Kreuz (Fig. 226); $AB = b$; $fg = h$; $ef = BC = d$, so ist in Bezug auf die Axe vw

das Trägheitsmoment von $efgh = m = \frac{d \cdot h^3}{12}$

" " $ApqD + p'BCq' = m_1 = \frac{(b-d)\, d^3}{12}$;

$$\left.\begin{array}{ll} \text{folglich} & M = m + m_1 = \frac{d\,(h^3 + [b - d]\, d^2)}{12} \\ \text{und} & V = \frac{h}{2} \end{array}\right\} \quad (3)$$

IV. Hat der Querschnitt des Körpers die Form wie Fig. 227 (der gewöhnliche Querschnitt für Balanciere) und setzt man

$$AB = A'B' = b$$
$$AC = A'C' = ef = d$$
$$fg = h,$$

so muß man den in (2. Abth. 64) erwiesenen Satz:

das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf irgend eine Axe ist dem Trägheitsmoment dieser Fläche in Bezug auf die, durch ihren Schwerpunkt parallel mit der Gegebenen gehende Axe, und dem Produkt aus dem Quadrat des Abstandes beider Axen in die gegebene Fläche, gleich,

anwenden. In Bezug auf die durch s gehende Axe v, w, ist das Trägheitsmoment von $ABCD = \frac{b \cdot d^3}{12}$, also in Bezug auf die Axe vw

$$m = \frac{b \cdot d^3}{12} + \left(\frac{h + d}{2}\right)^2 \cdot b \cdot d,$$

weil der Abstand beider Axen $= \frac{h + d}{2}$ ist.

Das Trägheitsmoment von A'B'C'D ist dasselbe wie m.

Ferner ist das Trägheitsmoment von $efgh = m_1 = \frac{d \cdot h^3}{12}$, daher

$$\left.\begin{aligned} M &= 2m + m_1 = d\left(\frac{bd^2}{6} + \frac{h^3}{12} + \tfrac{1}{2}(d + h)^2 b\right) \\ \text{und} \quad V &= \frac{h}{2} + d \end{aligned}\right\} (4)$$

V. Hat der Körper zum Querschnitt die T Form, wie sie Fig. 228 zeigt, und setzt man:

$$AB = b \; ; \; BC = ef = d \; ; \; fg = h \; ;$$

so muß man zuerst den Abstand der Axe vw von dem Schwerpunkt s der Fläche efgh bestimmen; bezeichnet man ss' mit u, so ist

$$b.d \times \frac{h+d}{2} + d.h \times o = u \times (b.d + h.d)$$

oder
$$u = \frac{b(h+d)}{2.(b+h)}$$

Nach dem vorigen Satz ist:

das Trägheitsmoment von ABCD in Bezug auf die Axe vw oder

$$m = \frac{b.d^3}{12} + \left(\frac{h+d}{2} - u\right)^2 . b.d,$$

das Trägheitsmoment von efgh oder

$$m_1 = \frac{d.b^3}{12} + u^2 . d.h,$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} M &= m + m_1 \\ &= d\left(\left[\frac{b.d^2+h^3}{12}\right] + \left[\frac{h+d}{2} - u\right]^2 b + u^2.h\right) \\ \text{und}\quad V &= \frac{h}{2} + u. \end{aligned}\right\} (5)$$

VI. Hat bei der T Form die Axe vw die Lage, wie es die Fig. 229 zeigt (die gewöhnliche Form von den Querschnitten der Radarme mit Seitenrippen), und setzt man $AB = h$; $AC = b$; $fg = b_1$ und $fk = d$; so ist:

das Trägheitsmoment von ABCD $= m = \frac{bh^3}{12}$

" " " gfkl $= m_1 = \frac{b_1 d^3}{12}$,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{daher} & M = \dfrac{bh^3 + b_1d^3}{12} \\ \text{und} & V = \dfrac{h}{2}\end{array}\right\} \quad (6)$$

VII. Ist der Querschnitt des Körpers ein Quadrat mit vier, auf den Seiten desselben senkrecht stehenden Rippen-Profilen (Fig. 230) (Querschnitt einer vierkantigen Welle mit Rippen), so nimmt man leicht wahr, daß es dieselbe Form ist, die wir in III betrachteten; nur befinden sich noch in den vier Ecken des Kreuzes die Quadrate abcd &c. Bezeichnet man die Seite eines solchen Quadrates mit s, so ist das Trägheitsmoment eines jeden in Bezug auf die durch ihren Schwerpunkt gehende Are $v_{,}w_{,}$ oder $v_{,,}w_{,,}$ gleich $\frac{s^4}{12}$, und in Bezug auf die Are vw oder

$$m = \frac{s^4}{12} + \left(\frac{d+s}{2}\right)^2 s^2;$$

ferner ist nach (5)

$$m_1 = \frac{d}{12}\,(h^3 + (b-d)\,d^2),$$

daher

$$\left.\begin{array}{l} M = 4m + m_1 \\ \quad = s^2\left(\dfrac{s^2}{3} + [d+s]^2\right) + \dfrac{d}{12}\left(h^3 + [b-d]\,d^2\right) \\ \text{und} \quad V = \dfrac{h}{2}\end{array}\right\} (7)$$

VIII. Ist endlich der Querschnitt des Körpers ein Quadrat mit vier, in den Richtungen ihrer Diagonalen befindlichen Rippen-Profilen (Fig. 231) (ebenfalls der Querschnitt einer Welle mit Rippen, nur stehen diese auf den Kanten derselben), so sieht man leicht, daß dieser Querschnitt aus der in III. gegebenen Form und aus vier Dreiecken

abc ꝛc. zusammengesetzt ist. Bezeichnet man ac oder bc mit s, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Dreiecks in Bezug auf die durch ihren Schwerpunkt gehende Axe v_1w_1 gleich $\frac{s^4}{36}$ und in Bezug auf die Axe vw oder

$$m = \frac{s^4}{36} + \left(\frac{d}{2} + \frac{s}{3}\right)^2 \frac{s^2}{2},$$

m_1 hat denselben Werth, wie in III,

folglich ist

$$\left.\begin{aligned} M &= 4m + m_1 \\ &= s^2\left(\frac{s^2}{9} + 2\left[\frac{d}{2} + \frac{s}{3}\right]^2\right) + \frac{d}{12}(h^3 + [b-d]^2 d^2) \\ \text{und } V &= \frac{h}{2}. \end{aligned}\right\} (8)$$

Der Ausdruck für M in (8) kann auch als Näherungswerth für den Querschnitt einer cylindrischen, mit Rippen versehenen Welle gebraucht werden, in welchem Falle man die Hypothenuse des Dreieckes so bestimmt, daß man den Bogen kl (Fig. 232) in 5 Theile theilt und die Theilpunkte 1 und 4 mit einander verbindet.

Diese in I—VIII. enthaltenen Werthe für M sind für die meisten, bei dem Bau der Maschinen vorkommenden Fälle ausreichend, und sollte man auf einen von diesen abweichenden Fall stoßen, so wird es nach den in Vorstehendem gegebenen Anweisungen nicht schwer sein, den Ausdruck für M zu entwickeln.

Hat man nun z. B. den Flexionswiderstand eines Körpers von gegebenem Querschnitt und gegebenen Dimensionen zu bestimmen, so berechne man zuvor nach einer der in I—VIII enthaltenen Formeln das Trägheitsmoment und führe den erhaltenen Zahlenwerth in (71. α) oder in (1—8.

in der Anmerk. zu 75) ein, und entwickele aus der so erhaltenen Gleichung den Werth der verlangten Größe.

Wir wollen als Beispiel einen gußeisernen Balancier, dessen Länge, von der Axe bis an das äusserste Ende gemessen, 7 bayr. Fuß beträgt, dessen Höhe innerhalb der Rippen der 2fachen Breite und dessen Breite der 4fachen Dicke der Rippen gleich ist, in der Art berechnen, daß, wenn an dem freien Ende desselben eine Kraft gleich 5000 bayr. Pfd. wirksam ist, man daraus seine übrigen, noch unbekannten Dimensionen bestimmen soll. — Nach **IV.** hat man

$$M = d\left(\frac{b \cdot d^2}{b} + \frac{h^3}{12} + \tfrac{1}{2}(d+h)^2 b\right);$$

und $V = \frac{h}{2} + d$; nun ist $b = 4d$ und $h = 2b = 8d$; folglich wenn man diese Werthe in vorstehende Gleichung substituirt, so erhält man

$M = 205{,}33 \cdot d^4$ (woher man als runde Zahl $205 \cdot d^4$ setzen kann)

und $V = 5d$.

Nach (71. α) ist

$$P = \frac{R \cdot M}{L \cdot V}.$$

Da (nach Tafel Seite 225) $R = 4493000$ ist und diese Zahl für bayr. Maaß mit 0,1521 multiplicirt, ferner $P = 5000$ und $L = 7$ gesetzt werden muß, so hat man

$$5000 = \frac{0{,}1521 \times 4493000 \times 205 d^4}{7 \cdot 5d}$$

und hieraus

$$= \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 7 \cdot 5000}{205 \times 683400}} = 0{,}1077 \text{ Fuß}$$

oder $d = 1{,}29$ Zoll, wofür man füglich 1,3 setzen darf.
Daher ist $b = 5{,}2$ Zoll und
die ganze Höhe des Balanciers $= 10{,}4 + 2{,}6 = 13$ Zoll.

Mittelst dieser gefundenen Zahlenwerthe läßt sich nun das Gewicht dieses Balanciers berechnen, das wir jedoch unterlassen, da es mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist.

77. Schlüßlich fügen wir den vorstehenden Betrachtungen über den Widerstand der Körper Folgendes noch bei:

Ist ein auf zwei Stützen **m** und **n** aufliegender Körper **AB** (Fig. 233), dessen Querschnitte Rechtecke sind, in **C** belastet, und soll derselbe in allen Punkten seiner Länge gleichen Widerstand besitzen, so müssen die beiden Krümmungen **AC** und **CB** Parabeln, deren Axen mit **AB** zusammenfallen, sein. Wenn hingegen die Last gleichförmig über die obere Fläche des Körpers verbreitet ist, oder sich längst desselben (wie bei Eisenbahnschienen) bewegt: so ist die Kurve **ACB** (Fig. 234) eine Ellipse, und **AC, CC'** sind ihre Halbaxen.

Mehrere über einander liegende, rechtwinkelige, prismatische Theile **ab, cd, ef** (Fig. 235), die durch Bänder **mn** zusammengehalten werden, besitzen so vereinigt einen Widerstand, welcher der Summe der Widerstände, die die einzelnen Theile abgesondert von den übrigen darbieten, gleich ist.

Sind hingegen mehrere solche über einander liegende Theile auf den Flächen, womit sie auf einander liegen, so gezahnt, wie es Fig. 236 zeigt, oder durch Schließkeile **cc..** (Fig. 237) vereinigt und durch Bänder **mn...** fest zusammengehalten, so besitzen diese Verbindungen einen Widerstand, der nicht merklich von dem eines einzelnen soliden Körpers von denselben Dimensionen und derselben Substanz verschieden ist.

Werden zwei rechtwinkelig geformte, prismatische Körper **AB, CD** durch Bänder **mn ..** und Zwischenstücke **k ..** so verbunden, wie sie in den Figuren 238 dargestellt sind, und bezeichnet man ihre Breite mit b, ihre ganze Höhe **AD** mit h und die Höhe des Zwischenraums **ad** mit h_1, so ist ihr Flexionswiderstand

$$\frac{R.M}{V} = R \cdot \frac{b\,(h^3 - h_1^3)}{6h}.$$

Da diese Verbindungen in der Regel nur in solchen Fällen angewendet werden, wo sie an beiden Enden aufliegen, so darf man nur (in (1), (3), (4) u. (5) Anmerk. zu Paragraph 75) für $\frac{M}{V}$ den ihm gleichen Ausdruck $\frac{b\,(h^3 - h_1^3)}{6h}$ setzen, um die Belastung Q, welche sie zu tragen vermögend sind, zu erhalten.

IX.

Formen und Dimensionen der Zapfen, Zapfenlager, der Wellen und der Radtheile.

78. **Zapfen und Zapfenlager.** — Die Zapfen, um welche sich ein Rad dreht, sind in der Regel von Eisen, zuweilen auch von Holz. Gewöhnlich werden die eisernen Zapfen aus einem Stück mit der Welle gegossen, wenn diese beträchtliche Dimensionen hat; sind aber solche unbeträchtlich, (hat z. B. eine Welle nur 2—3 Zoll Durchmesser, in welchem Falle dann derjenige der Zapfen noch geringer ist), so werden sie geschmiedet und die Zapfen angedreht. Wenn aber die Welle aus Holz besteht und es sollen eiserne Zapfen in dieselbe eingesetzt werden, so gibt es verschiedene Methoden, diese mit jener zu vereinigen, und welche wir nun in Nachstehendem einzeln betrachten wollen.

1. Spitzzapfen. — Hat ein Zapfen nur geringe Dimensionen, und ist der Widerstand, dem die Welle ausgesetzt wird, unbeträchtlich, so wird jener aus einem Stück viereckigen Eisen in der Art angefertigt, daß dieses an dem einen Ende rund gedreht und an dem andern zugespitzt wird. Dieser Zapfen wird in die hölzerne Welle so weit eingetrieben, daß nur der abgedrehte Theil vorragt.

2. Hakenzapfen. — Sind die Dimensionen des Zapfens geringer, und ist die Welle einem größern Widerstand oder Erschütterungen ausgesetzt, so wird der Hakenzapfen angewendet, der aus einem viereckigen Stück



Eisen **AB** (Fig. 239), das an dem einen Ende **A** rund abgedreht und an dem andern **B** rechtwinkelig umgebogen ist, besteht. Dasselbe wird in der hölzernen Welle dadurch befestigt, daß man in diese einen Einschnitt mn bis unter die Axe und so weit, als der Zapfen dick ist, macht. In dem Grund wird ein Loch q für die Aufnahme des Hakens ausgemeiselt, jener eingelegt, hierauf ein paar eiserne Ringe ab, cd um die Welle getrieben, und zuletzt der leere Raum über dem Zapfen mit Holz ausgefüttert.

3. Blattzapfen. — Wenn eine Welle einen beträchtlichen Widerstand zu leisten hat und ihre Dimensionen beträchtlich sind, so ist dann der Hakenzapfen nicht mehr genügend und man setzt dafür den Blattzapfen ein, der, entweder geschmiedet oder gegossen, allemal aus einem Stück angefertigt wird, aber aus drei, von einander unterscheidbaren Theilen, dem Zapfen **A** (Fig. 240), dem Kegel **AB** und den beiden, einander entgegengesetzt stehenden, Blättern oder Flügeln **AC, AD** zusammengesetzt ist. Die Welle wird für die Aufnahme der beiden Blätter und des Kegels ausgeschnitten, der Blattzapfen mit Schlegeln eingetrieben, hierauf die Ringe um die Welle gelegt, und der zwischen den Blättern und dem Holze der Welle vorhandene Spielraum mit Keilen ausgefüttert. Diese Methode, den Zapfen zu befestigen, hat das Unangenehme, daß, wenn die Welle ein ziemliches Gewicht hat oder periodische Erschütterungen erleidet, jener leicht los wird. Besser ist daher der

4. Flügelzapfen. — Dieser ist von dem vorher Betrachteten nur darin unterschieden, daß derselbe statt zwei Blätter oder Flügel, deren vier hat, die rechtwinkelig zu einander stehen (Fig. 241). Um ihn in der hölzernen Welle zu befestigen, wird diese für die Aufnahme der vier Flügel übers Kreuz ausgeschnitten und übrigens eben so verfahren, wie bei dem Blattzapfen angegeben worden ist.

5. Ringzapfen. — Die beste Methode, einen Zapfen mit einer hölzernen Welle zu vereinigen, ist diejenige, wo die Flügel eines Flügelzapfens durch einen sehr dicken Ring mit einander verbunden sind, wie es die Fig. 242 zeigt, der in dieser Form in einem Stücke gegossen und der ein Ringzapfen genannt wird. Die Welle wird, wie bei Flügelzapfen, übers Kreuz eingeschnitten, der Ringzapfen eingesetzt, und der Raum zwischen dessen Ringe und der Welle ausgefüttert und fest gekeilt.

In allen, in Vorstehendem betrachteten, Fällen hat man darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Axen der Zapfen mit derjenigen der Welle zusammenfallen; und wenn es die Umstände gestatten, so muß man die Zapfen erst, nachdem dieselben fest mit der Welle vereinigt sind und diese an ihren Platz gebracht ist, abdrehen.

Die Zapfen drehen sich in Lagern, welchen man die Form eines Halbkreises gibt. Dieselben werden gewöhnlich aus Bronze oder aus einer Mischung angefertigt, welche aus 84 Theilen Kupfer und 16 Theilen Zinn zusammengesetzt wird, und die sehr hart und dauerhaft ist. Die eben erwähnten, einfachen, halbkreisförmigen Lager (Fig. 243) werden nur dann angewendet, wenn die Welle entweder durch ihr Gewicht oder durch die auf sie einwirkenden Kräfte fortwährend das Bestreben, abwärts zu drücken, äussert.

In allen andern Fällen wendet man geschlossene, aus zwei halbkreisförmigen Theilen zusammengesetzte Lager an. Diese doppelten Lager ruhen zwischen zwei niedrigen Pfeilern a, b (Fig. 244), die sich von einer auf dem Träger der Welle befestigten Sohle cd erheben und welche nebst jenen aus einem Stücke gegossen werden. Die Pfeiler haben seitwärts Ausladungen m und n, in denen Schraubenbolzen, die nach stattgefundenem Abformen mit in die Form eingelegt und folglich in dem Moment, wo der Guß stattfindet, mit eingegossen und dadurch sehr dauerhaft befestigt werden, angebracht sind. Diese Schrauben gehen durch eine Ueber-

lage ef, welche mit einem unterhalb angebrachten Vorsprung auf dem obern Zapfenlager aufliegt und mittelst der beiden Schraubenmuttern g, h angedrückt werden kann. Endlich sind beide Zapfenlager auf ihren vertikalen Seitenflächen mit Nuten, und die beiden Pfeiler mit Federn (Vorsprüngen), welche in jene eingreifen, wie man bei i und k sieht, versehen, und die dazu dienen, das Ausgleiten der Zapfenlager in der Richtung der Wellenaxe zu verhüten. Müssen die Zapfenlager in einer beträchtlichen Höhe über der Sohle angebracht werden, so gibt man dem Träger derselben die Form, wie es Fig. 245 zeigt. Solche Gerüste nennt man Ständer.

79. **Dimensionen der Zapfen.** — Die Länge der Zapfen, welche auf den Widerstand der Reibung keinen Einfluß ausübt, da diese unabhängig von der Größe der Oberfläche ist, darf jedoch in Betreff des Brechungswiderstandes derselben nicht unbeachtet gelassen werden. Um den Durchmesser eines einem gegebenen Druck ausgesetzten Zapfens zu berechnen, muß man daher annehmen, daß er mit seinem äussersten Ende in dem Lager aufliege und jener ihn nahe an der Welle, in der Gegend seines Halses, abzubrechen strebe. Der Zapfen ist alsdann in dem Zustande eines an dem einen Ende befestigten, und an dem andern belasteten Körpers. Um den auf jedem der beiden Zapfen einer Welle stattfindenden Druck zu erhalten, muß man die Resultante von dem Gewicht der Welle, dem damit verbundenen Rade (in so fern ein solches mit jener vereinigt ist) und der an diesem wirksamen Kraft bestimmen, und sie in zwei andere, durch die Stützpunkte der Zapfen gehende, parallele Kräfte zerlegen.

Nennen wir also den so berechneten Druck N und die Länge des Zapfens l, so wird $N \times l$ das Moment der Kraft P sein, welche ihn zu biegen oder an seinem Halse zu brechen strebt. Ist nun r dessen Halbmesser, so ist das Moment seines Widerstandes nach [71. 3] des vorigen Ab-

schnittes) gleich $R \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{4}$, wenn R den in der (Seite 225 befindlichen) Tafel angegebenen Coefficienten des Flexions-widerstandes bezeichnet. Man hat folglich

$$N \times l = R \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{4}$$

und hieraus

$$r = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot l \cdot N}{\pi \cdot R}} = 1{,}083 \sqrt[3]{\frac{l \cdot N}{R}}. \qquad (\alpha)$$

Der Zapfen ist jedoch auch noch andern Ursachen des Bruches, z. B. dem Torsionswiderstande, unterworfen. Von einer Seite wird er nemlich von der Welle in Folge der tangential am Rade wirkenden Kraft gedreht und von der andern Seite durch die zwischen ihm und dem Lager entstehende Reibung zurückgehalten. Ist also P die eine Composante der am Rade tangential wirkenden Kraft, wird dabei angenommen, daß sie in der durch den Hals des Zapfens gehenden Ebene liege, und der Halbmesser des Rades mit a bezeichnet, so ist nach (73 [ζ]) des vorigen Abschnitts)

$$a \cdot P = \frac{\pi \cdot r^3}{2} \cdot T$$

und folglich $$r = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot a \cdot P}{\pi \cdot T}} \text{ *)}. \qquad (\beta)$$

*) Da das Moment des Reibungswiderstandes allemal geringer als das der oben betrachteten Composanten P ist — weil sonst die Bewegung der Welle nicht statt finden würde — so ist es augenscheinlich, daß eigentlich von jener die Größe des Torsionswiderstandes abhängt. Der Druck auf den Zapfen ist N, folglich der Reibungswiderstand $\mu \cdot N$, und daher dessen Moment gleich $\mu \cdot N \times r$. Dasselbe muß dem Moment

Man bestimmt nun nach (α) und nach (β) den Werth von r, und der größere wird als der gesuchte Halbmesser angenommen. *)

Tredgold gibt den Zapfen 0,85 des Durchmessers zu lange, folglich ist dann

$$l = 0{,}85 \times 2r = 1{,}7 \, . \, r$$

und
$$1{,}7 \, . \, r \, . \, N = R \, . \, \frac{\pi r^3}{4}$$

$\frac{T \, . \, M}{r}$ des Torsionswiderstandes gleich oder

$$\mu \, . \, N \, . \, r = \frac{T \, . \, M}{r}$$

sein. Da nun hier $M = \frac{\pi r^4}{2}$ ist, so hat man

$$\mu \, . \, N \, . \, r = T \, . \, \frac{\pi r^3}{2}$$

oder
$$r = \sqrt{\frac{2 \, . \, \mu \, . \, N}{\pi \, . \, T}} = 0{,}637 \sqrt{\frac{\mu \, . \, N}{T}} \qquad (1)$$

Wird in der obigen Gleichung (α) $l = 2r$ gesetzt (ein Fall, der häufig statt findet), so geht $1{,}083 \sqrt[3]{\frac{l \, . \, N}{R}}$ in

$$1{,}596 \sqrt{\frac{N}{R}} \qquad (2)$$

über, welcher Ausdruck unter allen Umständen größer, als der in (1) ist, und woraus abzunehmen ist, daß der in (α) für r erhaltene Ausdruck immer den größten Werth von r angibt.

*) Dieser so gefundene Halbmesser ist immer das kleinste Maaß, welches man für den Zapfen annehmen darf, und bezeichnet vielmehr die Grenze, unter welcher die Elasticität desselben alterirt würde.

oder $r = \sqrt{\frac{6{,}8 \, . \, N}{\pi \, . \, R}} = 1{,}471 \sqrt{\frac{N}{R}}$. (γ)

Diese mittelst (α) und (γ) für r erhaltenen Zahlenwerthe müssen aber wegen des Abnützens noch um eine durch die Erfahrung ermittelte Größe vermehrt werden. Tredgold nimmt dafür ein Sechstel des mittelst (γ) gefundenen Halbmessers an, so daß man also nach dieser Vorschrift

$$r = 1{,}716 \sqrt{\frac{N}{R}} \qquad (\delta)$$

erhielte *).

---

*) Um r in dem Fußmaaße irgend eines anderen Staates ausgedrückt zu erhalten, wenn der Drück N in Pfunden desselben Staates gegeben ist, hat man in den Formeln $(\alpha - \delta)$ die Größe R nur mit $\frac{\alpha}{\beta^2}$, oder mit den dafür (in Anmerk. S. 242) angegebenen Zahlenwerthen zu multipliciren.

Morin in seinem: Aide memoire de mecanique, setzt für gußeiserne Zapfen der Wasserräder, die einer beträchtlichen Abnützung ausgesetzt sind,

$$r = \sqrt[3]{\frac{1 \, . \, N}{2\,945\,000}} \qquad (1)$$

und zeigt durch Beispiele, daß dieser Ausdruck für r mit bestehenden, mustermäßig ausgeführten Wasserrädern sehr nahe zusammenstimmt.

Für gut in der Schmiere erhaltene Zapfen setzt er

für Gußeisen $r = \sqrt[3]{\frac{1 \, . \, N}{4\,480\,000}}$, (2)

für Schmiedeisen $r = \sqrt[3]{\frac{1 \, . \, N}{3\,600\,000}}$; (3)

80. Hölzerne und eiserne Wellen. Berechnung ihrer Dimensionen. — Die hölzernen Wellen bestehen in der Regel aus einem einzigen massiven Stücke, seltener sind sie aus Theilen zusammengesetzt. In jenem Falle ist ihr Querschnitt entweder ein reguläres Vieleck oder ein Kreis (Fig. 246). Letztere Form wird ihnen gewöhnlich an Ort und Stelle dadurch gegeben, daß man sie durch die disponible Kraft, oder durch einige Männer, die eine mit dem einen Zapfen verbundene Kurbel mittelst darauf gesteckter Krücken herumdrehen, in Bewegung setzt, während ein Arbeiter mit einem Drehmeisel die überflüssigen Hervorragungen wegnimmt. Wird die Welle aus mehreren Holzstücken zusammengesetzt, so werden diese zuvor so bearbeitet, daß ihre Querschnitte die Form von Gewölbsteinen erhalten, und hierauf mittelst eiserner Ringe so verbunden, wie aus Fig. 247 zu ersehen ist. Der innere Raum bleibt leer und die Zapfen werden in muffförmigen Ringen befestigt und diese an den beiden Enden der Welle fest angetrieben und gut verkeilt. Die Ringe, wodurch die Theile einer solchen Welle zusammengehalten werden, setzt man häufig

---

vergleicht man diese drei Formeln mit (α), so findet man, daß in

(1) der Werth von $R = 3750000$
(2) „ „ „ „ $= 5704000$
(3) „ „ „ „ $= 4584000$

angenommen ist. Wenn man also hinsichtlich der Bestimmung von r ganz sicher gehen will, so setze man in den obigen beiden Formeln (α) und (γ)

für Gußeisen $R = 4000000$
„ Schmiedeeisen $R = 6000000$.

Will man vorstehende, von Morin angegebene Formeln anwenden, wenn N in Pfunden, sowie l und r in Fußen ausgedrückt ist, so darf man nur den Zahlenwerth im Nenner mit $\frac{\alpha}{\beta^2}$ (Anmerk. S. 242) multipliciren.

aus zwei Theilen zusammen, die an ihren Enden mit auswärtsstehenden, durchlochten Tatzen m, n (Fig. 248) versehen sind, welche mittelst Schraubenbolzen fest zusammengezogen werden können. Wird eine Welle aus Schmiede- oder Gußeisen angefertigt, so muß sie wenigstens so dick wie die Zapfen derselben sein. Im Allgemeinen fertigt man nur Wellen von mäßigen Dimensionen aus Schmiedeeisen an. Gußeiserne Wellen von beträchtlichen Dimensionen baucht man in der Mitte aus.

Berechnung des Halbmessers einer Welle.

I. Für den Flexions-Widerstand. — Die Kräfte, welche auf die Wellen der Maschinen wirken und in diesen den Flexionswiderstand hervorrufen, sind fast immer nur die Gewichte der mit ihnen vereinigten Räder, Scheiben ꝛc. Man wird daher, um den gesammten Druck, welchem die Welle in ihrer Mitte ausgesetzt ist, zu erhalten, jede dieser Kräfte in der Art zerlegen, daß die eine Composante durch die Mitte des nächst befindlichen Zapfens und die andere durch die Mitte der Welle geht. Jene zusammen werden durch die Widerstände der Zapfen vernichtet, und diese nebst dem halben Gewicht der Welle bilden die Kraft, welche mit dem in der Mitte der Welle stattfindenden Flexionswiderstand im Gleichgewicht sein muß. Bezeichnet man also die sämmtlichen, auf die Mitte der Welle reducirten, Kräfte mit s, das Gewicht der Welle mit p, so ist

$$s + \frac{p}{2} = Q. \text{ *)}$$

*) Das Gewicht der Welle ist nämlich als ein auf ihrer Oberfläche gleichförmig verbreitetes Gewicht zu betrachten, was aber hinsichtlich des erzeugten Flexionswiderstandes nach (Anmerk. zu 75) ebenso viel ist, als wenn in der Mitte nur die Hälfte dieses Gewichtes angebracht wäre.

Nach (3) [Anmerk. zu 75] ist

$$Q = 4 \cdot \frac{R.M}{L.V}$$

und hieraus $$\frac{Q.L}{4.R} = \frac{M}{V}. \qquad (\alpha)$$

Je nachdem nun der Querschnitt der Welle ein volles Quadrat oder ein voller Kreis, oder eine Ringfläche ist, werden für M und V die im Paragraph 76 entwickelten Werthe dafür in (α) substituirt. In der Regel haben die Wellen entweder eine volle Kreisfläche oder eine Ringfläche zum Querschnitt, und deshalb wollen wir für diese beiden Fälle die zur Bestimmung der Halbmesser der Wellen erforderlichen Ausdrücke entwickeln.

Ist der Querschnitt eine volle Kreisfläche, so ist

$$\frac{M}{V} = \frac{\pi . r^3}{4},$$

wenn r den Halbmesser der Welle bezeichnet; also

$$\frac{Q.L}{4.R} = \frac{\pi . r^3}{4}$$

oder $$r^3 = \frac{L.Q}{\pi . R}. \qquad (\beta)$$

Ist der Querschnitt eine Ringfläche, und ihr äusserer Halbmesser gleich r, ihr innerer gleich r_1, so hat man nach (76. II.)

$$\frac{M}{V} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{r^4 - r_1^4}{r}\right) = \frac{\pi}{4}\left(r^3 - \frac{r_1^4}{r}\right),$$

also $$\frac{Q.L}{4.R} = \frac{\pi}{4}\left(r^3 - \frac{r_1^4}{r}\right)$$

oder $$r^3 - \frac{r_1^4}{r} = \frac{Q.L}{\pi . R}. \qquad (\gamma)$$

Diese beiden Gleichungen (β) und (γ) dienen nun zur Ermittelung des Flexionswiderstandes, welchen eine Welle besitzt. Wollte man mit ihnen den Halbmesser derselben genau bestimmen, so müßte man, da ihr Gewicht ein Bestandtheil von Q ist und dieses entweder durch $\pi . r^2 . L . \gamma$ oder $\pi . L . \gamma (r^2 - r_1^2)$ *) — je nachdem die Welle massiv oder hohl ist — ausgedrückt ist, eine dieser Größen in Q einführen, was aber eine weitläufige — für praktische Fälle nicht wohl geeignete — Rechnung verursachen würde.

Gewöhnlich ist die Belastung s in Vergleichung mit dem Gewicht der Welle so beträchtlich, daß dieses entweder unberücksichtigt bleiben, oder durch einen approximativen Werth ersetzt werden kann, wie wir aus unten stehendem Beispiele ersehen werden. Bei mäßigen Belastungen muß man ohnehin, um der Welle die erforderliche Stabilität zu geben, dieselbe stärker, als nöthig wäre, machen, und bei solchen kommt also eine auf obige Gleichungen gestützte Untersuchung gar nicht vor.

II. Für den Torsionswiderstand. — Der Torsionswiderstand einer Welle ist unabhängig von der Belastung derselben, dagegen abhängig von den Wirkungen, welche tangential an den Peripherien der auf ihnen aufgezogenen Räder stattfinden. Sind diese Wirkungen einander entgegengesetzt, so wird die Welle dadurch gerade so verdreht, als wenn sie an der Stelle des einen Rades befestigt wäre und nur die Wirkung an dem andern Rade statt fände. Ist also durch anderweitige Umstände die Größe der tangentiellen Wirkung P an diesem Rade, dessen Halbmesser mit a bezeichnet werde, bestimmt, so ist nach [73 (α)]

$$P = \frac{T}{a} . \frac{M}{r_0}$$

oder

$$\frac{a . P}{T} = \frac{M}{r_0} .$$

*) In diesen Ausdrücken bezeichnet γ das Gewicht der Raumeinheit.



Für cylindrische, massive Wellen ist aber

$$\frac{M}{r_0} = \frac{\pi . r^3}{2}$$

und für hohle Wellen

$$\frac{M}{r_0} = \frac{\pi}{2}\left(r^3 - \frac{r_1^4}{r}\right),$$

wenn r den äussern und r_1 den innern Halbmesser derselben bezeichnet. Daher hat man

1. für massive, cylindrische Wellen

$$r^3 = \frac{2 . a . P}{\pi . T}, \qquad (\delta)$$

2. für hohle, cylindrische Wellen

$$r^3 - \frac{r_1^4}{r} = \frac{2 . a . P}{\pi . T}. \qquad (\epsilon)$$

Hat man nun mittelst der Gleichungen (β), (δ) oder (γ) und (ε) die Werthe von r sowohl für den Flexions-, als Torsions-Widerstand ermittelt, so gibt man der Welle denjenigen Halbmesser, welcher dem größern der beiden gefundenen Werthe entspricht. *)

---

*) Dabei darf nicht unberücksichtigt gelassen werden, daß, wenn die Welle periodischen Erschütterungen ausgesetzt ist, für T modificirte Werthe zu nehmen sind, nämlich für

Eichenholz	T = 200000
Gußeisen	T = 4000000
Schmiedeeisen	T = 6000000.

Ferner muß man, wenn in den Gleichungen (α—ε) die Größen in Fußen und Pfunden gegeben sind, R oder T mit $\frac{\alpha}{\beta^3}$, oder mit den dafür (in Anmerk. S. 242) erhaltenen Zahlenwerthen multipliciren.

Ist die Welle mit Rippen versehen, so vermehren diese wohl den Flexionswiderstand, aber auf die Vergrößerung des Torsionswiderstandes haben sie keinen Einfluß.

Aus folgendem Beispiel wird am besten der Gang der Rechnung zu entnehmen sein, der in dergleichen Fällen zu befolgen ist.

Eine 16 Fuß lange, massive, gußeiserne Welle trägt an ihrem einen Ende ein 10 Fuß breites und 200 Ctr. schweres Wasserrad, und an dem andern Ende ein 60 Ctr. schweres Treibrad; über jenes ragt die Welle 1 Fuß, und über dieses 2 Fuß hervor. Das Wasserrad hat 24 Fuß im Durchmesser, und das einströmende Wasser erzeugt an seiner Peripherie eine tangentielle Kraft von 3000 ℔.

Man soll die Halbmesser dieser Welle und ihrer beiden Zapfen — letztere in der Voraussetzung, daß ihre Längen ihren Durchmessern gleich sind — bestimmen. Sämmtliche Zahlenwerthe sind in bayer. Maaß und Gewicht ausgedrückt.

Man berechne zuerst für den Torsionswiderstand den Halbmesser der Welle mittelst

$$r^3 = \frac{2 \cdot a \cdot P}{\pi \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot R.}$$

Hier ist $\alpha = 12$; $P = 3000$; $T = 4000000$ und $\frac{\alpha}{\beta^2} = 0{,}1521$,

$$\text{also} \quad r = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 12 \cdot 3000}{3{,}1416 \cdot 0{,}1521 \cdot 4\,000\,000}} = 0{,}335 \text{ Fuß}.$$

Da nun das Gewicht p der Welle gleich $\pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \gamma$ ist, wenn γ das Gewicht der Raumeinheit (hier das Gewicht eines Kubikfußes Gußeisen = 324 ℔) bezeichnet, so hat man

$$p = 3{,}1416 \cdot 0{,}1122 \cdot 16 \cdot 324 = 1383 \text{ ℔},$$

wofür man vorläufig 1500 ℔ setzen kann.

Um jetzt den in der Mitte c der Welle statt findenden Druck zu erhalten, sei AB (Fig. 249) ihre Länge, a der

Wird die Welle durch einen Krummzapfen in Bewegung gesetzt, so ist **P** die an ihrer Warze applicirte Kraft und **a** die Länge ihres Arms. Um für diesen die entsprechenden Dimensionen zu erhalten, muß man das, was in (72) über den gleichen Widerstand der Körper gesagt worden ist,

---

Schwerpunkt des Treibrades, b der des Wasserrades, so ist Aa = 2; bB = 6; Ac = cB = 8; der Druck in a gleich 6000 ℔ und in b gleich 20000 ℔,

daher der von a auf c reducirte Druck $= \frac{2 \cdot 6000}{8} =$ 1500 ℔

" " " b " " " " $= \frac{6 \cdot 2000}{8} =$ 15000 "

hiezu das halbe Gewicht der Welle mit 750 "

also der Totaldruck in C in Bezug auf den Flexionswiderstand = 17250 "

Berechnet man jetzt r für den Flexionswiderstand, so hat man da

$$r^3 = \frac{L \cdot Q}{\pi \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot R}$$

und hievon L = 16; Q = 17250 und R = 4000000 ist

$$r = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 17250}{3{,}1416 \cdot 0{,}1521 \cdot 4000000}} = 0{,}5246 \text{ Fuß.} \qquad (1)$$

Für diesen Halbmesser wäre aber das Gewicht des Wellenrades

$p = 3{,}1416 \cdot 0{,}2752 \cdot 16{,}324 = 4489$ ℔.

Nimmt man hiefür, mit Einschluß des Gewichtes beider Zapfen, die runde Summe von 4800 ℔ an, und corrigirt dem gemäß den in der Mitte der Welle stattfindenden Druck, indem man statt der obigen 750 ℔ die Hälfte von 4800 oder 2400 ℔ substituirt, so ist dieser = 18900 ℔; wird dieser Werth in (1) statt 17250 gesetzt, so erhält man

$$r = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 18900}{3{,}1416 \cdot 0{,}1521 \cdot 4000000}} = 0{,}5409 \text{ Fuß.}$$

dabei berücksichtigen, woraus hervorgeht, daß er in der Nähe der Welle stärker als in der Nähe der Warze gemacht werden muß. Uebrigens berechnet man die Dimension seines größten, nahe an der Welle befindlichen, Querschnitts ganz

---

Berechnet man zur Probe neuerdings das Gewicht der Welle für diesen gefundenen Halbmesser, so erhält man

$$p = 4764 \text{ ℔},$$

also kleiner, als es in der vorigen Rechnung angenommen wurde; da die Differenz nicht mehr als 36 ℔ beträgt, so kann man den Halbmesser

$$r = 0{,}54 \text{ Fuß oder } 6{,}48 \text{ Zoll}$$

als den richtigen betrachten.

Um jetzt die Drückungen auf die beiden Zapfen zu erhalten, hat man nach (Fig. 249)

Druck auf den Zapfen A

von dem Rad in $a = \dfrac{14 \cdot 6000}{16} = 5250$ ℔

„ „ „ „ $b = \dfrac{6 \cdot 20000}{16} = 7500$ „

„ der Welle . . . 2400 „

Summe . . . 15150 ℔.

Druck auf den Zapfen B

von dem Rad in $a = \dfrac{2 \cdot 6000}{16} = 750$ ℔

„ „ „ „ $b = \dfrac{10 \cdot 20000}{16} = 12500$ „

„ der Welle . . . 2400 „

Summe . . . 15650 ℔.

Berechnet man nun nach (79. α) den Halbmesser für $R = 7355000$, so erhält man

$$r^3_a = \frac{4 \cdot 2r \cdot 15650}{3{,}1416 \cdot 0{,}1521 \cdot 7355000},$$

und hieraus

$$r_a = 0{,}189 \text{ Fuß} = 2{,}27 \text{ Zoll},$$

auf dieselbe Weise, wie oben in dem Beispiele (Seite 270) gezeigt worden ist.

81. Von den Radarmen und Radkränzen. — Hölzerne Räder von kleinen Dimensionen oder beiläufig sechs Fuß Durchmesser haben in der Regel vier, größere hingegen haben sechs und zuweilen acht Arme. Diese tragen mit dem einen ihrer Enden die Theile, woraus die Radkränze zusammengesetzt sind und mit den andern sind sie in den Tatzen einer auf der Welle aufgezogenen Nabe mittelst Schraubenbolzen befestigt (Fig. 250), oder zwei einander gegenüber befindliche Arme bestehen aus einem

---

dies ist jedoch nur der kleinste Halbmesser, welcher dem Zapfen A gegeben werden darf. Nimmt man hingegen $R = 4000000$, so erhält man

$$r_a = \sqrt{\frac{8 \cdot 15650}{3{,}1416 \cdot 0{,}1521 \cdot 4000000}} = 0{,}256 \text{ Fuß};$$

und berechnet man ihn nach der (in der Anmerk. zu 79) enthaltenen) Morin'schen Formel, so ist

$$r_a = \sqrt{\frac{2 \cdot 15650}{0{,}1521 \cdot 2945000}} = 0{,}264 \text{ Fuß}.$$

Man ersieht hieraus, daß, wenn die Zapfen einer starken Abnützung ausgesetzt sind, es vortheilhafter ist, ihre Halbmesser mittelst letzter Formel zu bestimmen, in allen übrigen Fällen genügen die in [79. (α) und (γ)], wenn für R der in der Anmerkung (Seite 280) angegebene Zahlenwerth gesetzt wird.

Für den Zapfen B hat man

$$r_b^2 = \frac{8 \cdot 15150}{3{,}1416 \cdot 0{,}1521 \cdot 4000000}$$

und hieraus

$$r_b = 0{,}252 \text{ Fuß}.$$

Es ist also:

der Durchmesser der Welle		=	12,96 Zoll
„ „ des Zapfens	A	=	6,15 „
„ „ „ „	B	=	6,05 „

einzigen Stück Holz (Fig. 251), das in der Mitte bei m eingeschnitten ist und das durch eines der in der Welle angebrachten Löcher durchgesteckt und hierauf, wenn auch die Uebrigen auf gleiche Weise placirt und in ihrer Mitte vermöge ihrer Einschnitte übereinander geschoben sind, festgekeilt wird.

Uebrigens ist die Construktion der hölzernen Räder so verschiedenartig, daß wir hier in kein weiteres Detail eingehen können und daher auf den Atlas verweisen, in welchem die vorzüglichsten der bis jetzt als brauchbar befundenen Verbindungen der Radarme mit hölzernen und gußeisernen Kränzen enthalten sind.

Die gußeisernen gezahnten Räder werden mit ihren Armen und ihrer Nabe aus einem Stück gegossen, wenn ihr Durchmesser unter neun Fuß ist. Sind sie hingegen größer, so wird sowohl der Kranz als auch die Nabe, besonders gegossen und beide mittelst eiserner oder hölzerner Arme mit einander vereinigt. In allen diesen Fällen macht man, in Folge der im Paragraph 72 des vorigen Abschnittes erörterten Gründe, die eisernen Arme an den Stellen, wo sie mit der Nabe vereinigt sind, breiter, als an jenen, wo sie mit dem Radkranz verbunden sind, und zwar am Besten in dem Verhältniß von 2 : 1 oder 3 : 2. Gewöhnlich sind die Arme nicht so dick, als der Radkranz breit ist; deshalb werden sie seitwärts mit einer (zuweilen auch auf beiden Seiten mit einer) Rippe versehen, wie aus den Querschnitten Fig. 252 zu ersehen ist, um dadurch den Seitenbiegungen einen Widerstand entgegen zu setzen.

Für gußeiserne Räder mit 6 Armen und einem Halbmesser, der zu 1 Meter angenommen ist, hat Tredgold nachstehende Tafel gegeben, welche die Dimensionen der Radarme für verschiedene, an der Peripherie des Rades wirkende Kräfte enthält.

Tafel

der Verhältnisse der Arm- und Rippenbreiten eines mit sechs Armen versehenen Rades von 1 Meter Halbmesser, an dessen Peripherie eine gegebene Kraft tangential wirkt.

Tangentielle Wirkung am Rade in Kilogrammen.	Breite der Radarme in Centimetern.	Breite der Rippen in Centimetern.
10	4,2	1,21
40	6,—	2,—
80	8,—	3,—
158	8,5	3,9
244	9,7	4,85
336	10,67	6,3
430	11,64	6,8
580	12,12	8,25
730	13,1	8,73
870	13,8	9,7
1100	14,5	10,67
1210	15,5	11,64
1500	16,—	12,6
1750	16,5	13,68
2200	17,—	14,06
2300	17,5	16,5
2660	18,—	17,—
2840	18,5	17,95
3220	19,—	19,—
3500	19,5	19,4

Die erste Colonne dieser Tafel enthält die tangential an der Peripherie des Rades statt findende Wirkung in Kilogrammen; die zweite die größte (in der Nähe der Nabe und in der Richtung der Bewegung gemessene) Breite der Radarme, und die dritte die Breite der zur Verstärkung aufgesetzten Rippen, beide letztern in Centimetern ausgedrückt.

Will man die Dimensionen der Arm- und Rippenbreiten für ein Rad, dessen Halbmesser größer oder kleiner als 1 Meter ist, mittelst dieser Tafel bestimmen, und r bezeichnet den gegebenen Halbmesser, so darf man nur die zweite und die dritte Colonne mit $\sqrt{r}$ multipliciren. *) Hat man auf diese Weise

---

*) Da der Querschnitt der Arme (ohne Berücksichtigung der Rippe) ein Rechteck ist, so hat man nach [71. (δ)], wenn ihre Länge gleich 1 gesetzt wird, für die hier verstandene Breite (die in [71. (δ)] mit h bezeichnet ist) den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{6.P}{b.R}},$$

und wenn die dortige Länge L hier mit r bezeichnet wird, für dieselbe Breite

$$\sqrt{\frac{6.P.r}{b.R}};$$

setzt man also den in der zweiten Colonne angegebenen Werth, welcher der Kraft P entspricht, gleich a und bezeichnet die Breite der Arme für ihre Länge r mit A, so ist:

$$a : A = \sqrt{\frac{6.P}{b.R}} : \sqrt{\frac{6.P.r}{b.R}}$$

$$= 1 : \sqrt{r},$$

daher

$$A = a.\sqrt{r}, \qquad (1)$$

wie oben angegeben ist.

Um die Breite der Radarme in Fußen oder Zollen irgend eines andern Maaßes zu erhalten, wenn die Wirkung an der Peripherie des Rades in Pfunden ausgedrückt ist, be-

die Breite eines Radarmes gefunden, so kann man mittelst [71. (δ)] die Dicke desselben bestimmen, wenn man in (δ)

zeichne man, wie bisher, das Verhältniß des Kilogramms zu dem angenommenen Pfund mit α und dasjenige des Meters zu dem angenommenen Fuß mit β, die in der ersten Colonne enthaltenen Werthe mit P; die gegebenen Pfunde mit P_1; die in Fußen ausgedrückte Länge der Radarme mit r_1, und ihre Breite mit A_1, so ist:

$$P = \frac{P_1}{\alpha}\ ;\ r = \frac{r_1}{\beta}$$

und weil $A^{\text{Centim.}} : A_1^{\text{Fuß}} = 1 : \frac{\beta}{100}$,

so ist $A = \frac{100 \cdot A_1}{\beta}$,

substituirt man diese für r und A erhaltenen Werthe in (1), so hat man

$$\frac{100 \cdot A_1}{\beta} = a \cdot \sqrt{\frac{r_1}{\beta}},$$

und hieraus $$A_1 = \frac{a \cdot \sqrt{\beta \cdot r_1}}{100} \quad (2)$$

oder will man A_1 in Zollen ausdrücken, so ist

$$A = \frac{12 \cdot a \cdot \sqrt{\beta \cdot r_1}}{100}. \quad (3)$$

Ein Beispiel wird die Anwendung dieser Formeln am besten zeigen. Es wirke an der Peripherie eines Rades, dessen Durchmesser 10 preuß. Fuß beträgt, eine Kraft von 2000 preuß. Pfunden, so ist in diesem Falle

$P_1 = 2000\ ;\ r_1 = 5\ ;\ \beta = 3{,}186$ und $\alpha = 2{,}138$,

daher $$P = \frac{2000}{2{,}138} = 935.$$

Mit dieser Zahl gehe man in die erste Colonne ein; man findet, daß sie zwischen 870 und 1100 fällt, daher ist

$a > 13{,}8$
$a < 14{,}5$.

statt P den sechsten Theil der an der Peripherie des Rades wirkenden Kraft einsetzt; die aber, um gegen statt findende Stöße und Erschütterungen gesichert zu sein, in den meisten Fällen zu verdoppeln ist. *)

Will man nun A_1 genau erhalten, so nehme man die Differenzen von 1100 und 870; von 935 und 870 und von 14,5 und 13,8; diese sind

230 ; 65 und 0,7.

Bildet man daraus eine Proportion, so hat man

$$230 : 65 = 0{,}7 : 0{,}197.$$

Das vierte Glied 0,197 (wofür man 0,2 setzen kann) ist die Zahl, um welche der Werth von a für P = 870 vermehrt werden muß, so daß also a = 14 ist.

Daher erhält man

$$A_1 = \frac{12 \,.\, 14 \,.\, \sqrt{3{,}186 \,.\, 5}}{100} = 6{,}72 \text{ preuß. Zoll.}$$

*) Will man für das in voriger Anmerkung gegebene Beispiel Dicke bestimmen, so hat man nach (71. [δ])

$$P = \frac{\alpha}{\beta^2} R \,.\, \frac{b \,.\, h^2}{6 \,.\, L}$$

und hieraus

$$b = \frac{6 \,.\, L \,.\, P}{h^2 \,.\, \frac{\alpha}{\beta^2} R.}$$

Hier ist: $L = 5$; $P = \frac{2000}{6} = 333$; $h = \frac{6{,}72}{12}$;

daher wenn R = 4000000 und für $\frac{\alpha}{\beta^2}$ der Seite 242 angegebene Werth gesetzt wird

$$b = \frac{6 \,.\, 5 \,.\, 333 \,.\, 144}{(6{,}72)^2 \,.\, 0{,}2106 \,.\, 4000000} = 0{,}038 \text{ preuß. Fuß,}$$

oder mit 12 multiplicirt gleich 0,46 Zoll, diese doppelt genommen wird die Dicke gleich 0,92 Zoll.

Die Breite der Rippe (der man übrigens dieselbe Dicke wie dem Radarm gibt) wird durch eine einfache Proportion

Tredgold gibt für die Dicke der Radarme die Regel: man theile die Dicke d des Radkranzes, in der Richtung eines Halbmessers gemessen, in drei Theile, und nehme einen solchen Theil ($\frac{1}{3}$ d) für die Dicke der Radarme. Aber er gibt nicht an, wie die Dicke d zu bestimmen ist. Für große Räder von 12—18 Fuß Durchmesser nimmt man d oder die Dicke des Radkranzes zu $1\frac{4}{5}$ — 2 Zoll — und für kleinere Räder von 3—4 Fuß Durchmesser zu $\frac{3}{4}$ — $1\frac{1}{8}$ Zoll an. Jedoch darf in allen diesen Fällen d nicht geringer, als die Dicke der Zähne ist, genommen werden, damit der Widerstand des Radkranzes in gehörigem Verhältniß mit der am Rade wirksamen Kraft stehe.

Wenn der Radkranz und die Arme zusammen in einem Stücke gegossen werden, so muß bei der Bestimmung der Dicke des Radkranzes auch auf das Einziehen (den Schrumpf) des Metalls, während dasselbe nach stattgefundenem Gusse von dem flüssigen in den starren Zustand übergeht, Rücksicht genommen und in ein entsprechendes Verhältniß mit den Dimensionen der Arme gesetzt werden. Das Geeignetste, welches für diese beiden Theile anzunehmen sein dürfte, scheint uns dasjenige zu sein, wo das Einziehen während des Erkaltens des Gusses ebenso gleichmäßig in dem Radkranz als in den Armen statt findet. Nun ist leicht wahrzunehmen, daß der Umfang des Rades und die Länge der Arme derselben sich gleichzeitig einander proportional vermindern werden, wenn die Abkühlung durchaus in den mit einander verbundenen Theilen in jedem Augenblick nach demselben Gesetz statt findet und daß dann in diesem Falle weder in dem

---

erhalten, indem man die in der Tafel angegebene (kleinere) Breite der Radarme und der Rippe als erstes oder zweites Glied, und die berechnete Armbreite als drittes Glied setzt; demgemäß ist

$$13{,}8 : 9{,}7 = 6{,}72 : x$$

also $$x = \frac{9{,}7 \,.\, 6{,}72}{13{,}8} = 4{,}72 \text{ preuß. Zoll}$$

die Breite der Rippe.

Radkranz, noch in den Armen eine Spannung erzeugt wird. Indem wir dies voraussetzen, bemerken wir nun, daß in dem Augenblick des Gusses die in jedem Theil enthaltene Wärme dem Volumen desselben proportional ist, und daß sie hernach der Aussenfläche jedes dieser Theile proportional entweicht. Wenn also das Verhältniß des Volumens zu der Aussenfläche sowohl in dem Radkranz als in den Armen dasselbe ist, so wird die Einziehung durchaus gleichförmig statt finden.

Berechnet man also das Volumen und die Oberfläche der Arme, sowie des Radkranzes und vergleicht die erhaltenen Zahlenwerthe mit einander, so wird man sehen, ob das Verhältniß des Volumens zur Oberfläche in Beiden dasselbe ist, und dann können die angenommenen Dimensionen beibehalten werden; ausserdem muß man sie so abändern, daß sie der gegebenen Bedingung entsprechen. Bei diesen Rechnungen dürfen jedoch die an den Radarmen angesetzten Rippen nicht unbeachtet gelassen werden. *)

Hat ein Rad einen beträchtlichen Durchmesser, ist z. B. dieser größer als 12 Fuß, so wird in der Regel der Radkranz in einem Stücke, ohne Arme, gegossen, und diese mit der Nabe oder der Welle mittelst hölzerner, gußeiserner oder schmiedeiserner Arme auf die Weise vereinigt, wie es Fig. 253 zeigt, indem ihre beiden Enden mittelst Schraubenbolzen mit

---

*) Bezeichnet man die mittlere Breite der Arme mit b, die mittlere Höhe der darauf befindlichen Rippe mit h, die Dicke beider mit d, die Breite des Radkranzes mit B, dessen Dicke mit D, den mittlern Halbmesser desselben mit r und die Länge der Arme mit L, so hat man dem Obigen zufolge

$$\frac{2\pi r \,.\, B \,.\, D}{2\pi r \,.\, 2\,(B + D)} = \frac{6 \,.\, d\,(b + h)\,L}{6 \,.\, 2\,(b + d + h)\,L}$$

oder

$$\frac{B \,.\, D}{B + D} = \frac{d\,(b + h)}{b + d + h}.$$

Mittelst dieser Gleichung kann nun eine der Größen bestimmt werden, wenn die übrigen gegeben sind.

dem Radkranz und mit der Nabe verbunden werden. Ist die Welle, so wie auch die Radarme, von Holz, so werden diese in jener auf die oben angegebene Weise befestigt und nur ihre Enden mit dem Radkranz durch Schraubenbolzen vereinigt.

Gußeiserne Arme werden in dem Falle, wo der Radkranz besonders gegossen und hernach mit dem Arme vereinigt wird, in einem Stück mit der Nabe gegossen.

Sehr große Räder werden, um ihnen die erforderliche Festigkeit zu geben, aus mehreren Ringen, Armen und Streben zusammengesetzt.

Dreht sich ein Rad mit großer Geschwindigkeit und der Radkranz hat ein beträchtliches Volumen, so strebt die Centrifugalkraft desselben, in dem Falle, wenn er aus mehreren Theilen — wie bei Schwungrädern — zusammengesetzt ist, diese Theile von einander zu trennen oder loszureißen, und diese Wirkung ist gleich $\frac{\psi^2 . r . P}{g}$, wenn P das Gewicht des Radkranzes, r seinen mittlern Halbmesser und ψ seine Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.

X.

Gleichgewicht der Flüssigkeiten.

82. Nachdem wir uns nun mit der Mechanik der festen Körper beschäftigt und in dieser das Wesentlichste, was bei dem Bau der Maschinen vorzugsweise in Anwendung kommt, kennen gelernt haben, wollen wir jetzt zur Mechanik der flüssigen Körper übergehen und mit der Betrachtung des Gleichgewichts derselben beginnen. Wir werden jedoch bei der Erklärung des Wesens und der Natur flüssiger Körper, die man in jedem Lehrbuch der Physik findet, nicht verweilen, sondern führen hier nur an, daß man die tropfbarflüssigen *), sowie die gasförmigen, jede für sich als eine Hauptgattung betrachtet; daß jene in einem oben offenen Gefäße in Ruhe verbleiben; hingegen diese sich, in Folge der gegenseitigen Repulsion, welche die Wärme in ihren Elementen erzeugt, nach allen Richtungen ausdehnen. Ohngeachtet dieser, ihrer, charakteristischen Unterscheidungsmerkmale sind doch die Principien, welche wir in Nachstehendem entwickeln werden, beiden Gattungen gemein.

Es ist ein allgemeines Gesetz aller **schweren** Flüssigkeiten, daß, wenn sie im Gleichgewichte oder in Ruhe sind,

---

*) Der Ausdruck: **tropfbar flüssiger Körper** ist nicht ganz richtig, indem sowohl Wasser in atmosphärischer Luft, als auch diese in jenem Tropfen bildet und also diese Benennung kein charakteristisches Merkmal ist. Da man jedoch in der industriellen Mechanik unter tropfbaren Flüssigkeiten beinahe ausschließend Wasser in atmosphärischer Luft vorhanden versteht, so ist obige Benennung fur unsern Zweck genügend.

ihre freie Oberfläche auf der Richtung, nach welcher die Schwere wirkt, in allen ihren Punkten senkrecht ist. Wäre diese Kraft (die Schwere) nicht senkrecht zu der Oberfläche des flüssigen Körpers, so würde man sie an jedem ihrer Punkte nach zwei andern Richtungen zerlegen können, deren eine senkrecht zu der erwähnten Oberfläche ist, die andere hingegen in einer Ebene liegt, die jene in dem betrachteten Punkt tangirt und in dem an dieser Stelle befindlichen Element der Flüssigkeit das Bestreben zur Bewegung erzeugt; findet derselbe Fall bei allen übrigen Elementen statt, so entsteht eine Bewegung des flüssigen Körpers in der Richtung dieser Kräfte, und das Gleichgewicht ist aufgehoben. Man ersieht hieraus, daß alle Elemente der freien Oberfläche eines im Gleichgewicht oder in Ruhe befindlichen, flüssigen Körpers auf der Richtung der Schwere senkrecht sein müssen. Die Oberfläche des Meeres oder eines großen See's ist daher ein Stück einer Kugelfläche, deren Halbmesser dem der Erde gleich ist. Die Oberflächen flüssiger Körper, welche in einem Raume von mäßiger Ausdehnung eingeschlossen sind, wie z. B. das Wasser eines Teiches, werden jedoch als horizontale Ebenen betrachtet, da sie nur ein sehr kleiner Theil der erwähnten Kugelfläche sind und daher mit der an dieser Stelle gedachten, tangirenden Ebene zusammenfallen.

83. **Gleichheit des Drucks.** — Betrachten wir einen, in einem Gefäß **ABDC** (Fig. **254**) enthaltenen, schweren, flüssigen Körper, dessen Oberfläche **MN** ist, so sind seine gesammten Elemente im Zustande des Gleichgewichts oder der Ruhe zweierlei Arten von Pressungen unterworfen, wovon die einen durch die Wirkung der Schwere erzeugt werden und die andern von einer äussern Ursache, die auf alle Elemente der Oberfläche wirkt, herrühren. Wir wollen vor der Hand die Wirkung der Schwere unberücksichtigt lassen und zuerst die Flüssigkeit nur der Einwirkung dieser äussern Ursache unterworfen betrachten. Denken wir uns zu diesem Zwecke das Element m (Fig. **254**) in der Form eines ungemein kleinen Würfels oder einer sehr

kleinen Kugel. Damit es an seiner Stelle verbleibe, so muß es von allen Seiten gleich stark gedrückt werden, oder die Resultante dieser Drückungen muß gleich Null sein. Was so eben von einem Element gesagt wurde, gilt von allen übrigen derselben Flüssigkeit. Wenn also sämmtliche Elemente einer Flüssigkeit in Ruhe verbleiben sollen, so muß jedes gleich stark von allen Seiten gedrückt werden. Wird daher an irgend einer Stelle einer in einem Gefäße eingeschlossenen Flüssigkeit ein Druck angebracht und es soll dadurch keine Störung in dem Gleichgewicht ihrer einzelnen Elemente entstehen, so muß sich nothwendigerweise derselbe durch die ganze Flüssigkeit nach allen Richtungen gleichmäßig verbreiten, weil nur in diesem Falle jedes Element von allen Seiten gleich stark gedrückt wird. Durch die Erfahrung ist wirklich nachgewiesen, daß diese Eigenschaft allen flüssigen Körpern zukommt und wegen ihrer Wichtigkeit nennt man sie: das Princip der gleichen Fortpflanzung des Drucks nach allen Richtungen.

Man kann sich nun durch folgende Betrachtungen überzeugen, daß Gleichgewicht zwischen den Drückungen gegen die Wände eines Gefäßes, welche Form dasselbe auch haben möge, statt findet, wenn der an einer Stelle der Flüssigkeit angebrachte Druck sich nach allen Richtungen gleichmäßig verbreitet. Nehmen wir an, die Flüssigkeit sei in einem Dreieck **ABC** (Fig. 255) enthalten, so werden in Folge der gleichmäßigen Fortpflanzung des Drucks die Seiten proportional ihrer Länge gedrückt. Man kann nun den auf jeder Seite stattfindenden Druck in ihrer Mitte vereinigt und der Größe derselben proportional annehmen. Zieht man durch die Mitte der drei Seiten **AB**, **AC** und **BC** die Linien **LO**, **IO** und **HO** senkrecht zu ihnen, so schneiden sich diese in dem Punkte **O**; nimmt man jetzt die Größen dieser drei Linien den drei Seiten **AB**, **AC** und **BC** proportional und construirt aus **OH** und **OI** ein Parallelogramm, so ist die Diagonale **OK** desselben die Resultante der auf die Seiten **AC** und **BC** ausgeübten Drückungen; das Dreieck **OIK** ist aber, da

OI und **OH** senkrecht auf **BC** und **AC** sind, augenscheinlich dem Dreieck **ABC** ähnlich, folglich auch die Linie **OK** in demselben Verhältniß der Seite **AB** proportional, wie es die Linien **OI** und **OH** den Seiten **BC** und **AC** sind. Also ist **OK** gleich und entgegengesetzt der Linie **LO**, und folglich sind die drei, durch die Linien **LO**, **IO** und **HO** dargestellten Kräfte unter sich im Gleichgewicht. Ist die Flüssigkeit in einem Polygon **ABCDE** (Fig. 256), dessen Seiten in allen Punkten gleichmäßig gedrückt werden, eingeschlossen, so kann man es in Dreiecke **ABC**, **ACD** und **DCE** zerlegen. Die Resultante der Drückungen, die auf die beiden Seiten **AB** und **BC**, sowie auf diejenigen **DE** und **CE** statt finden, wird durch die Seiten **AC** und **DC** dargestellt; die Drückungen auf diese beiden Seiten sind aber mit dem auf die Seite **AD**, den Vorhergehenden zufolge, unter sich im Gleichgewicht, folglich sind es auch die gesammten, auf alle Seiten des Polygons statt findenden, Drückungen. Auf ähnliche Weise läßt sich darthun, daß, wenn die Flüssigkeit in einer dreiseitigen Pyramide eingeschlossen ist und ihre Seitenflächen proportional den Flächeninhalten derselben gedrückt werden, diese Kräfte unter sich ebenfalls im Gleichgewicht sind. Von einer solchen Pyramide schließt man auf ein Polyeder und zuletzt auf einen Körper mit gekrümmter Oberfläche, indem dieser als ein Polyeder von ungemein vielen Seiten betrachtet werden kann, deren Punkte alle gleichmäßig gedrückt werden.

Hieraus folgern wir, daß die Form eines Gefäßes, in welchem eine nicht schwere Flüssigkeit eingeschlossen ist, jede beliebige sein kann, und immer die gegen die Wände desselben statt findenden Drückungen unter sich im Gleichgewicht sein werden.

84. **Verfahren, um den Druck zu vervielfältigen.** — Das Princip der gleichen Fortpflanzung des Druckes gestattet uns, die Größe der durch eine Flüssigkeit gegen eine gegebene Fläche statt findenden Pressung zu bestimmen, indem diese allemal dem Flächeninhalt jener proportional ist. Bezeichnen wir also die Größe des

Druckes, welcher auf die Einheit der Fläche statt findet, mit p und nehmen dabei an, daß p in Kilogrammen oder in Pfunden ausgedrückt sei, je nachdem die Flächeneinheit ein Quadratmeter oder ein Quadratfuß ist, und A sei der Inhalt einer gegebenen Fläche, so ist

$$A \times p$$

das Maaß des gegen die gegebene Fläche statt findenden Drucks. Man kann also den durch eine Flüssigkeit ausübenden Druck vervielfältigen, indem man die Fläche, gegen welche er statt findet, vergrößert. Wenn man in einem von allen Seiten eingeschlossenen und mit einer Flüssigkeit angefüllten Gefäße eine kleine Oeffnung ab (Fig. 257) anbringt, und in dieser eine Röhre befestigt, worin ein Kolben vollkommen dicht vor und rückwärts geschoben werden kann, so wird ein an diesem applicirter mäßiger Druck sich nach allen Richtungen durch die Flüssigkeit bis an die Wände des Gefäßes verbreiten und die gegen diese statt findenden Pressungen können ausserordentlich groß werden, wenn ihr gesammter Flächeninhalt beträchtlich ist. Mißt z. B die Kolbenfläche einen Quadratzoll und der auf sie statt findende Druck beträgt fünf Pfund, die gesammte Oberfläche des Gefäßes betrage aber 10000 Quadratzoll, so ist der gegen sie ausgeübte Druck $5 \times 10000 = 50000$ Pfund oder 500 Centner. Betrachten wir ferner eine Flüssigkeit, — deren Gewicht wir, wie bisher, bei Seite setzen, — welche in zwei Gefäßen enthalten ist, die durch eine Röhre O (Fig. 258) mit einander communiciren und in denen Kolben auf die vorhin bezeichnete Weise angebracht sind. Nehmen wir nun an, auf den mit A bezeichneten Kolben wirkt die Kraft P und wir sollen nun ermitteln, welchen Druck die Flüssigkeit gegen den andern Kolben B ausübt, oder, was dasselbe ist, welche Kraft gegen diesen in der Richtung seiner statt findenden Bewegung wirken muß, damit er an seiner Stelle verbleibe. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Flächen der beiden Kolben A und B mit s und S und den Druck gegen die Flächeneinheit mit p, so ist $P = sp$. Nun wird in

Folge des Princips der gleichmäßigen Fortpflanzung des Drucks, die Pressung p auch auf die Einheit der Fläche des Kolbens **B** unverändert übertragen und daher ist der Druck gegen diesen gleich **Sp**. Man ersieht hieraus, daß die Totaldrückungen gegen die beiden Kolben sich wie sp zu **Sp** verhalten und folglich den Flächen beider Kolben proportional sind. Wenn also **S** zehn oder hundertmal größer als **s** ist, so ist auch der Druck auf den Kolben **B** zehn oder hundertmal größer als auf denjenigen **A**. Wird der Druck auf den Kolben **B** mit **Q** bezeichnet, so ist

$$P : Q = s : S$$

oder

$$P . S = Q . s$$

Aber das eben gefundene Verhältniß findet nicht in Betreff der geleisteten Arbeit beider Kolben statt, d. h. die Arbeit des Kolbens **B** wird sich nicht proportional mit der Vergrößerung seiner Oberfläche vermehren. Denn bezeichnet man die Wege, welche die Kolben **A** und **B** gleichzeitig durchlaufen, mit **H** und **h**, so ist die

Arbeit des Kolbens **A** gleich **H . P** oder gleich **H . s . p**

" " " **B** " **h . Q** " " **h . S . p**

Ist in den beiden Gefäßen Wasser enthalten, das bekanntlich nur in äußerst geringem Grade zusammendrückbar ist und daher in vorliegendem Fall als eine Flüssigkeit betrachtet werden kann, die ihr Volumen nicht verändert, indem sie aus dem einen Gefäß in das andere übertritt, so daß durch das Niedersteigen des Kolbens **A** die Flüssigkeit in dem ersten Gefäß sich genau um so viel vermindert, als durch das Aufsteigen des Kolbens **B** in dem zweiten Gefäß sich dieselbe vermehrt, so hat man

$$H . s = h . S \qquad (\alpha)$$

oder mit p multiplicirt

$$H . s . p = h . S . p.$$

Hieraus folgt: daß die geleisteten Arbeiten beider Kolben einander gleich sind und wenn es auch möglich ist, auf diese Weise enorme Pressungen zu erzeugen, so wird doch die Arbeit selbst nicht vermehrt. Aus der Gleichung (α) nimmt

man ferner wahr, daß die durchlaufenen Wege der Kolben umgekehrt ihren Flächen proportional sind, und daß daher der Kolben B einen um so kleinern Weg durchläuft, je größer seine Fläche in Vergleichung mit der des Kolbens A ist.

85. **Druck der schweren Flüssigkeiten.** — Bis hieher haben wir nur die Uebertragung des Druckes von Element zu Element in einer Flüssigkeit und die hieraus gegen die Wände des Gefäßes hervorgehende Pressung untersucht. Man kann diesen nach allen Richtungen sich gleichmäßig äussernden Druck mit dem Namen: hydrostatischer Druck bezeichnen, um ihn von demjenigen zu unterscheiden, welcher einzig durch solche Kräfte, wie z. B. die Schwere, die nur nach einer Richtung auf die Elemente der Flüssigkeit wirken, entsteht. Dieser letzt genannte Druck gestattet nicht dieselbe Behandlung wie der hydrostatische Druck; denn er ist in allen Punkten ein und derselben horizontalen Schichte der Flüssigkeit constant, verändert sich von einer Schichte zur andern, und zwar im Verhältniß des Gewichtes der Flüssigkeit, welche sich über jeder der Betrachtung unterstellten Schichte befindet. Der durch die Schwere erzeugte Druck pflanzt sich also nur in horizontaler Richtung, aber nicht von unten nach oben, fort, während sich der hydrostatische Druck nach allen Richtungen verbreitet und constant bleibt.

Denn betrachten wir die in dem Gefäße ABCD (Fig. 259) enthaltene Flüssigkeit, welche der Einwirkung der Schwere und einem, von aussen auf sie statt findenden, gegebenen Druck ausgesetzt ist, so kann man sie in lauter horizontale, sehr dünne Schichten zerlegen und in Einer derselben ein Element betrachten. Wird dasselbe in der ersten (obern) Schichte liegend angenommen, so findet kein anderer Druck darauf statt, als der, welcher durch die von aussen einwirkende Kraft darauf entsteht; derselbe wird noch durch das Gewicht des betrachteten Elementes vermehrt, und die hieraus entstehende Drückung pflanzt sich an der untern Fläche der ersten Schichte in horizontaler Richtung fort. Da jedoch jede Schichte als sehr dünne vorausgesetzt wird, so kann

man ohne bemerkbaren Irrthum, den an ihrer untern Fläche statt findenden Druck, als gleichförmig durch sie verbreitet annehmen und diese Voraussetzung für alle folgenden Schichten gelten lassen. Nimmt man das Element in der zweiten Schichte liegend an, so drückt auf dasselbe das Gewicht des in der ersten Schichte liegenden Elementes und die von aussen darauf wirkende Kraft; der dadurch erzeugte Druck wird noch um das Gewicht des betrachteten Elements vermehrt, und der so erzeugte Gesammtdruck verbreitet sich horizontal in der zweiten Schichte. Liegt das Element in der dritten Schichte, so ist der erzeugte und sich horizontal verbreitende Druck der von aussen auf das oberste Element einwirkenden Kraft und dem Gewicht von drei über einander liegenden Elementen gleich u. s. f. Mit einem Wort: der Druck, der in jeder horizontalen Schichte der Flüssigkeit statt findet, wird durch das Gewicht der über der betrachteten Schichte stehenden Flüssigkeitssäule und des auf dieselbe von aussen statt findenden Druckes gemessen. Endlich, wenn man diese Schichten bis an die Wände des Gefäßes ausgedehnt annimmt, so sieht man, da in jeder horizontalen Schichte sich der in ihr statt findende Druck gleichmäßig fortpflanzt, daß diese Wände ungleichmäßig gepreßt werden, und daß der Druck in jedem Element der Wandfläche eben so groß, als in einem Elemente derjenigen horizontalen Schichte ist, welche durch das in der Wandfläche angenommene Element geht.

86. Untersuchung des Drucks schwerer Flüssigkeiten, welche in unregelmäßig gestalteten Gefäßen enthalten sind. — Wenn die Wände eines Gefäßes gegen einander geneigt sind und folglich ihre obern Ränder A, B (Fig. 260) einander näher liegen, als ihre Grundlinien C, D, so dürfte man leicht glauben, daß der hydrostatische Druck in den Elementen jeder Schichte ab nur um das Gewicht der vertikalen Flüssigkeitssäule hi, welche zwischen dieser Schichte und der geneigten Wand CA enthalten ist, vermehrt werde. Aber dies ist ein Irrthum, der leicht zu berichtigen ist; denn be-

trachtet man ein Element m dieser Schichte, welches sich vertikal unter der obersten horizontalen Fläche AB der Flüssigkeit befindet, so findet man, daß dieses einer Pressung ausgesetzt ist, die dem darauf ausgeübten hydrostatischen Druck und dem Gewicht der darüber befindlichen Flüssigkeitssäule mn zusammengenommen, gleich ist. Dieser Druck pflanzt sich in dieser Schichte horizontal bis zu der Wand AC fort und übt auf das Element a denselben Totaldruck aus. Der Druck, der in jedem Punkte der Wand, auf die Flächeneinheit bezogen, statt findet, ist also aus dem hydrostatischen Druck und dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule zusammengesetzt, welche die Flächeneinheit zur Basis und den vertikalen Abstand dieses Punktes von der Oberfläche der Flüssigkeit zur Höhe hat.

Der gegen die Oberfläche AB (Fig. 260) statt findende äussere Druck hat auf die in jeder Schichte durch die Schwere erzeugten Pressungen gar keinen Einfluß und ist in dieser Hinsicht ganz gleichgültig. Denn derselbe durchdringt alle auf einander folgenden Schichten, ohne sich zu verändern, und ist folglich in jeder Schichte, gleichviel ob dieselbe der obersten Schichte näher oder entfernter liegt, gleich groß; es ist also augenscheinlich, daß die durch die Schwere in jeder Schichte erzeugten Pressungen gänzlich unabhängig von dem hydrostatischen Druck sind, dagegen um so beträchtlicher werden, je weiter die betrachtete Schichte von der obersten entfernt liegt. Auch in Betreff des Druckes der Atmosphäre können wir uns gleichfalls genügende Rechenschaft geben, obgleich wir ihre wahre Höhe nicht kennen; denn wenn man sie in lauter Schichten zerlegt denkt, so hat die oberste gar nichts zu tragen; die zweite trägt die erste; die dritte die erste und zweite u. s. f., so daß also die Pressungen in denselben nach Maßgabe, je nachdem man sich der Erdoberfläche nähert, zunehmen, und ihr Druck wird an der Oberfläche des Meeres am größten. Dieser Druck, welchen man den atmosphärischen nennt, ist gewöhnlich die gegen die Oberflächen der Flüssigkeiten statt findende Pressung und wird durch den Barometer gemessen. Derselbe ist gleich 1,033 Kilogram-

men für den Quadratcentimeter oder wird durch das Gewicht einer 10,33 Meter hohen Wassersäule oder einer 0,75 Meter hohen Quecksilbersäule, welche die gepreßte Fläche zur Basis hat, ausgedrückt. *) Jedes Element der Wandfläche eines Gefäßes, worin eine Flüssigkeit enthalten ist, wird also — wie bereits schon gesagt worden ist — von einer Kraft gepreßt, die dem atmosphärischen Druck und dem Gewichte der über diesem Elemente stehenden Flüssigkeitssäule gleich ist; dieselbe Pressung erleidet auch jedes Element derjenigen horizontalen Schichte der Flüssigkeit, die mit dem in der Wandfläche betrachteten Elemente zusammenfällt. Fragt man nun, wie die Wände des Gefäßes einem so beträchtlichen Druck zu widerstehen vermögen, so wird man bei näherer Erwägung dieser Frage wahrnehmen, daß durch die Fortpflanzung des hydrostatischen Drucks der Flüssigkeit, der Druck der Atmosphäre bis an die Wände des Gefäßes von innen nach außen

*) Will man die Größe des atmosphärischen Druckes, der auf den Quadratzoll irgend eines landesüblichen Maaßes statt findet, bestimmen, und man bezeichnet das Verhältniß des Meters zu diesem Maaße mit β; das Gewicht eines in demselben Maaße ausgedrückten Kubikfußes Wasser mit γ und nimmt das specifische Gewicht des Quecksilbers zu 13,6 an, so ist der gesuchte Druck

$$K = \frac{0.75 \,.\, \beta \times 13.6 \times \gamma}{144} = 0.0708 \,.\, \beta \,.\, \gamma \qquad (1)$$

für Orte, deren mittlerer Barometerstand nicht unter 0,74 Meter oder 27 $\frac{1}{3}$ paris. Zoll ist, hat man

$$K = 0{,}07 \,.\, \beta \,.\, \gamma \qquad (2)$$

Da nun ein preußischer Kubikfuß Wasser 66 preuß. Pfund
„ „ „ wiener „ „ 56,4 wiener „
„ „ „ bayerischer „ „ 44,4 bayer. „
wiegt, so ist der atmosphärische Druck auf
einen preußischen Quadratzoll = 14,89 preußische Pfund
„ wiener „ = 12,63 wiener „
„ bayerischen „ = 10,75 bayer. „

gebracht wird, daß jedoch die atmosphärische Luft, welche das ganze Gefäß umgibt, auch gegen dasselbe von aussen nach innen drückt; da nun für jedes Element der Wandfläche diese Drückungen einander gleich und entgegengesetzt sind, so vernichten sie sich gegenseitig und es werden in Wirklichkeit die Wände nur durch das Gewicht der in dem Gefäß enthaltenen Flüssigkeit gedrückt.

Diesem Raisonnement zufolge ist der Druck einer schweren Flüssigkeit gegen denjenigen Theil der Wandfläche, welcher eine der horizontalen Schichten umschließt, dem Gewicht der über diesem Wandstreifen stehenden Flüssigkeitssäule, welche letztern zur Grundfläche hat, gleich. Es folgt hieraus, daß der Boden eines Gefäßes stärker als dessen Seitenwände, und diese an ihrer Grundlinie stärker als an ihrem obern Rande gedrückt werden. Denn in einem Gefäße EFDC (Fig 261) ist der Druck auf den Boden CD dem Gewicht des Prismas CDHG, welches größer als das Gewicht ABDC der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit ist, gleich, während der Druck des Bodens CD gegen die Tafelfläche mn nicht größer, als das Gewicht der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit ist. Man erklärt sich dieses Paradoxon, indem man den in jedem Element des Gefäßes statt findenden normalen Druck nach dem in Vorhergehendem angegebenen Princip sucht und nach horizontalen und vertikalen Richtungen zerlegt. Es ist nun sehr leicht wahrzunehmen, daß sich alle auf diese Weise erhaltenen horizontalen Pressungen gegenseitig vernichten und folglich das Gefäß auf der horizontalen Tafel nach keinerlei Richtung ausweichen wird; daß hingegen die vertikalen Pressungen aus zwei Gruppen paralleler Kräfte zusammengesetzt sind, deren eine von oben nach unten, und die andere von unten nach oben ihre Wirkung äussert. Die erste Gruppe dieser Kräfte bringt nun den Druck gegen den Boden CD hervor, und wenn man davon den Druck, welchen die zweite Gruppe erzeugt, abzieht, so ist der so erhaltene Unterschied der Druck des Gefäßes gegen die Ta-

felfläche, welcher genau dem Gewichte der in jenem enthaltenen Flüssigkeit gleich ist. *)

---

*) Man überzeugt sich von der Richtigkeit des Vorstehenden auf folgende Weise. Es sei ABDC (Fig. 262) ein Gefäß, dessen Breite, senkrecht auf die Ebene der Zeichnung gemessen, der Längeneinheit gleich ist. Theilt man die Kurve AC in eine sehr große Anzahl Theile, so kann jeder als eine Gerade betrachtet werden, und zieht man aus den Theilpunkten M, M′ 2c. Parallelen mit der Basis des Gefäßes, so wird dadurch die krumme Wandfläche in lauter Elemente zerlegt, welche die Einheit zur Länge und einen Theil der Kurve, wie z. B. MM′, zur Breite haben. Betrachten wir nun die Pressung auf ein solches Element, lassen dabei den atmosphärischen Druck unberücksichtigt, da in Bezug auf denselben das Gefäß im Gleichgewicht ist, und drücken die auf das Element MM′ statt findende normale Pressung durch die Linie PM aus, so ist

$$PM = MM' \times Mm \times \gamma, \qquad (1)$$

wo γ die Gewichtseinheit der Flüssigkeit bezeichnet.

Zerlegt man diesen Druck nach horizontaler und vertikaler Richtung, so hat man, da die Dreiecke MPQ und MM′O einander ähnlich sind und sich nach (83) die horizontalen Drückungen gegenseitig vernichten,

$$PM : MQ = MM' : MO$$

und hieraus

$$MQ = PM \cdot \frac{MO}{MM'}; \qquad (2)$$

substituirt man in (2) für PM seinen in (1) erhaltenen Werth, so erhält man

$$MQ = Mm \times MO \times \gamma.$$

Da nun Mm × MO gleich der Fläche Mmm′O ist, so sieht man, daß der gesammte Vertikaldruck, welcher von unten nach oben statt findet, der Summe der Flächen Mmm′O, Om′m″O′ 2c. oder der Fläche ACH, multiplicirt mit γ, gleich ist; der Druck von oben nach unten gegen den Boden CD

Welche Form und Ausdehnung also ein Gefäß ABDC (Fig. 263) haben mag, immer ist jede horizontale Schichte ab durch ein Gewicht der Flüssigkeit gepreßt, welches demjenigen eines Prismas, das diese Schichte zur Basis und den Abstand Mh derselben von der Oberfläche der Flüssigkeit zur Höhe hat, gleich ist: jedes Element der Wandfläche, welche in der Ebene dieser Schichte liegt, erleidet denselben Druck, oder die Flächeneinheit derselben wird von einer Flüssigkeitssäule gedrückt, welche die Flächeneinheit zur Basis und Mh zur Höhe hat.

87. Bestimmung der Dicke der Schutzbretter, der Wehre und der Dämme. — Beträchtliche Wassermassen sind oft in einem Reservoir enthalten, das von einer Seite von einem Damme geschlossen ist, in welchem sich ein Einschnitt, wodurch das Wasser abfließt, befindet. Um diesen Ausfluß zu reguliren oder selbst zu unterbrechen, ist in dem erwähnten Einschnitt gewöhnlich eine ebene Fläche angebracht, die man beliebig erheben oder herablassen kann. Dieselbe ist in der Regel ein Rechteck, das sich in den Falzen zweier Säulen oder Pfosten auf und abwärts bewegen und in jeder verlangten Lage feststellen läßt, und welche man ein Schutzbrett (Schütz) nennt.

Um demselben die erforderliche Dicke geben zu können, damit es der Wirkung des dagegen statt findenden Drucks mit Sicherheit zu widerstehen vermöge, muß man nothwendigerweise diesen Druck kennen. Ist also AB (Fig. 264) ein Schutzbrett, wodurch ein Reservoir geschlossen wird, l seine Länge, senkrecht auf die Ebene der Zeichnung gemessen, und

ist gleich der Fläche HBDC $\times \gamma$. Der Unterschied zwischen HBDC $\times \gamma$ und ACH $\times \gamma$ gibt die Größe des Druckes, womit das Gefäß gegen die Tafel gepreßt wird. Es ist aber

$$HBDC \times \gamma - ACH \times \gamma = ABCD \times \gamma$$

und dieser Ausdruck bezeichnet genau das Gewicht der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit.

P.

MN die Oberfläche des Wasserstandes oder der Wasserspiegel, so kann man die Flüssigkeit in lauter horizontale Schichten zerlegen, wodurch die Fläche des Schutzbrettes in eben so viele parallele Streifen oder Elemente abgetheilt wird. Bezeichnet ab die Breite eines solchen und h die Höhe des Wasserspiegels über demselben, so ist der Druck des Wassers gegen dieses Element einem Wasserprisma gleich, das $l \times ab$ zur Basis und h zur Höhe hat. Bezeichnet man mit γ das Gewicht der Raumeinheit (eines Kubikmeters oder Kubikfußes Wassers), so ist der Druck gegen das Element

$$h \times ab \times l \,.\, \gamma. \qquad (\alpha)$$

Da h kleiner oder größer ist, je nachdem die betrachtete Wasserschichte dem Niveau MN näher oder entfernter liegt, so folgt aus (α), daß der Druck gegen das Schutzbrett mit der Tiefe des davor stehenden Wassers proportional zunimmt und also auch die Dicke des Schutzbrettes von oben nach unten ebenfalls zunehmen müßte. Gewöhnlich macht man aber dasselbe durchaus gleich dick; diese Dicke muß daher dem stärksten, am Grunde statt findenden Druck entsprechend genommen werden. Betrachten wir den untersten Streifen Bb des Schutzbrettes, bezeichnen dessen — übrigens sehr geringe — Breite mit a und die Höhe des Niveau über diesen Streifen mit H, so ist der Druck gegen denselben gleich

$$H \,.\, l \,.\, a \,.\, \gamma.$$

Weil dieser Druck gleichförmig über den Streifen verbreitet ist und das Schutzbrett mit seinen beiden aufrechten Kanten in einem Falz liegt, so kann man diesen Streifen als ein an beiden Enden aufliegendes Prisma, über welches die Last gleichförmig verbreitet ist, betrachten, und hat daher nach Seite 264 (Anmerk. [7])

$$L \,.\, P = 8 \,.\, \frac{R.M}{V} \,.$$

In dieser Gleichung muß man, wenn u die zu bestimmende Dicke der Schutzbretter bezeichnet

$L = l$; $P = H . l . a . \gamma$; $M = \frac{au^3}{12}$ und $V = \frac{u}{2}$

setzen; daher ist

$$H . l^2 . a . \gamma = 8 . R . \frac{\frac{au^3}{12}}{\frac{u}{2}}$$

und hieraus

$$u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3 . H . \gamma}{R}} . \qquad (\beta)$$

In dieser Gleichung ist H, l und u in Metern ausgedrückt, γ bezeichnet das Gewicht eines Kubikmeters Wasser, welches gleich 1000 Kilogramm ist, und R den in der Tafel Seite 225 gegebenen Zahlenwerth.

Ist hingegen H, l in Fußen gegeben und γ bezeichnet das Gewicht eines Kubikfußes Wasser, so muß man R mit $\frac{\alpha}{\beta^2}$ (s. Seite 242. Anmerk.) multipliciren, um u ebenfalls im Fußmaaße ausgedrückt zu erhalten. Man hat also

$$H . l^2 . \gamma = \tfrac{4}{3} . \frac{\alpha}{\beta^2} . R . u^2$$

und hieraus

$$u = \frac{l . \beta}{2} \sqrt{\frac{3 . H . \gamma}{\alpha . R}} . \text{*)}$$

---

*) Wenn ein Schutzbrett bedeutende Dimensionen hat, so ist die durch den Druck entstehende Reibung in den Falzen sehr beträchtlich, und es entsteht daher die Frage: welche Kraft zum Erheben des Schutzbrettes erforderlich ist? — Man muß daher, um diese zu lösen, den gesammten, gegen das Schutzbrett statt findenden Normaldruck zuvor bestimmen, welches auf folgende Weise geschieht.

Bezeichnet man die Abstände der oben betrachteten, auf einander folgenden Streifen des Schutzbrettes von dem Wasser-

Ist der Damm, welcher von einer Seite ein Wasserreservoir abschließt, aufgemauert und so angelegt, daß das Wasser nach seiner ganzen Länge sich über demselben ergießen kann, wenn durch einen äußern Zufluß das Wasservolumen vermehrt wird, so nennt man denselben ein Wehr.

---

spiegel mit h_1, h_2, h_3 2c., ihre Breiten mit x_1, x_2, x_3 2c. und die Höhe des Wasserstandes über dem untersten Streifen mit H, so ist der Druck

gegen den 1ten Streifen $= h_1 . l . x_1 . \gamma$
„ „ 2ten „ $= h_2 . l . x_2 . \gamma$
„ „ 3ten „ $= h_3 . l . x_3 . \gamma$ u. s. w.,

also der gesammte Druck gegen das Schutzbrett

$$\gamma (h_1 . l . x_1 + h_2 . l . x_2 + h_3 . l . x_3 + ..)$$

In der Voraussetzung, daß die Breiten der Streifen sehr klein sind, bezeichnen die Produkte $h_1 . l . x_1$, $h_2 . l . x_2$ 2c. die Momente derselben in Bezug auf die Linie MN, und es ist augenscheinlich, daß die Summe dieser Momente dem Moment des benetzten Theils des Schutzbrettes, auf dieselbe Linie bezogen, gleich sind. Letzteres Moment wird erhalten, wenn man die benetzte Fläche des Schutzbrettes mit dem Abstand ihres Schwerpunktes von MN multiplicirt; dieser ist aber gleich $\frac{H}{2}$, daher das Moment des Schutzbrettes gleich $\frac{H}{2} . b . l$, wenn b die von dem Wasser bespülte Breite desselben bezeichnet, folglich

$$h_1 . l . x_1 + h_2 . l . x_2 + \ldots = \frac{H}{2} . b . l$$

und der Gesammtdruck gegen das Schutzbrett

$$\frac{H}{2} . b . l . \gamma.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Reibungscoefficienten μ und nennt die Kraft, welche zum Erheben der Schütze erforderlich ist, P, so hat man

$$P = \mu . \frac{H . b . l . \gamma}{2} .$$

Wir wollen nun die Dimensionen desselben in der Voraussetzung zu bestimmen suchen, daß er im Stande ist, das von demselben aufgestauchte Wasser mit Sicherheit zurück zu halten. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Länge des Wehrs mit L, die Höhe des Wasserstandes von der Basis derselben an gemessen mit H und das Gewicht eines Kubikfußes Wasser mit γ. Nehmen wir ferner an, daß die dem Wasser zugekehrte Seitenfläche MD (Fig. 265) des Wehrs senkrecht sei und dieselbe von oben nach unten in sehr schmale parallele Streifen abgetheilt werde, deren Abstände von dem Wasserspiegel man mit h_1, h_2 rc. und ihre Breiten mit x_1, x_2 bezeichnet, so ist der Druck gegen den

1ten Streifen $= h_1 . L . x_1 . \gamma$
2ten — $= h_2 . L . x_2 . \gamma$

u. s. w.

also der gesammte Druck gegen das Wehr

$$\gamma\,(h_1 . L . x_1 . + h_2 . L . x_2 . + \ldots)$$

Nach der Anmerkung zur Seite 311 ist aber $h_1 . L . x_1 + h_2 . L . x_2 + ..$ der vom Wasser bespülten Wandfläche des Wehrs, multiplizirt mit dem Abstand ihres Schwerpunktes vom Wasserspiegel, gleich. Diese Wandfläche ist aber im vorliegenden Falle gleich $H . L$ und der Abstand ihres Schwerpunktes von MN gleich $\frac{H}{2}$, folglich

$$h_1 . L . x_1 + h_2 . L . x_2 + .. = H . L \times \frac{H}{2} = \frac{H^2 . L}{2}$$

und mithin der Totaldruck gegen das Wehr

$$\frac{H^2 . L}{2} . \gamma \qquad (\alpha)$$

Derselbe strebt die über der Basis des Wehrs aufgeführte Mauerung horizontal fortzuschieben. Ist ihr Gewicht gleich P und ihr Reibungscoefficient μ ohngefahr gleich $\frac{1}{3}$, so ist der Widerstand, welchen das Wehr dem Horizontaldruck des Wassers entgegensetzt, gleich $\frac{P}{3}$. Damit also dasselbe mit

Sicherheit dem gegen ihn statt findenden Druck widerstehe, muß

$$\frac{P}{3} > \frac{H^2 . L . \gamma}{2}$$

oder

$$P > \tfrac{3}{2} . H^2 . L . \gamma$$

sein. Wenn das Gewicht eines Kubikfußes der Mauerung mit γ_1, ihre Breite mit b_1 bezeichnet und dabei angenommen wird, daß der Querschnitt dieser Mauerung ein Rechteck sei und der Wasserspiegel mit ihrer obern horizontalen Fläche zusammenfalle, so ist:

$$P = H . L . b_1 . \gamma_1$$

daher

$$H . L . b_1 . \gamma_1 > \tfrac{3}{2} . H^2 . L . \gamma$$

oder

$$b_1 > \frac{3 . H . \gamma}{2 . \gamma_1}$$

Wenn das Wehr aus Sandsteinen aufgeführt wird, so ist, da diese ohngefähr doppelt so viel als das Wasser wiegen, $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1}{2}$; mithin

$$b_1 > \tfrac{3}{4} . H. \qquad (\beta)$$

Ausserdem kann sich aber auch durch den Druck des Wassers die Mauerung des Wehrs um die äußerste Kante K der Basis drehen, wenn das Moment der Resultante aus den gesammten Pressungen des Wassers größer, als das Moment der Mauerung, beide auf dieselbe Kante K bezogen ist. Es ist daher zu untersuchen, ob in diesem oder in dem vorher betrachteten Falle die Breite des Wehrs sich größer ergiebt. Indem wir nun die angenommene Bezeichnung beibehalten, so ist das Moment der Mauerung in Bezug auf die Kante K gleich

$$H . L . b . \gamma_1 \times \frac{b}{2} = \frac{H . L . b^2}{2} . \gamma_1 \qquad (\alpha_1)$$

Um das Moment des Wasserdruckes in Bezug auf die Kante K zu erhalten, muß man zuvor die Lage des Angriffspunktes der aus den Gesammtdrückungen des Wassers entstehende Resultante bestimmen. Um denselben zu erhalten, drücken wir zuerst die Momente der in den auf einander folgenden Wasserschichten statt findenden Pressungen in Bezug auf eine beliebig angenommene Ebene aus und wählen hiezu den Wasserspiegel MN. Bezeichnet man also, wie vorhin, die Abstände zwischen den untern Flächen der erwähnten Wasserschichten und MN mit h_1, h_2 rc., die Dicke einer jeden mit x, so ist das Moment der Pressung

in der 1ten Schichte $h_1 . L . x . \gamma \times h_1 = h_1^2 . L . x . \gamma$

„ „ 2ten „ $h_2 . L . x . \gamma \times h_2 = h_2^2 . L . x . \gamma$

u. s. w., daher die Summe aller dieser Momente

$$L . \gamma \, (h_1^2 x + h_2^2 x + \ldots) \qquad (\beta_1)$$

Um einen Ausdruck für die Summe der in den Klammern eingeschlossenen Produkte zu erhalten, denken wir uns eine regelmäßige Pyramide SAC (Fig. 266), deren Basis ein Quadrat, und deren Höhe SB der Seite ihrer Grundfläche gleich ist. Setzt man SB = AC = H und theilt die Pyramide in lauter parallele Schichten ch, gk rc., deren untere Flächen gh, ik um Sm, Sn rc. von S abstehen, so sind auch die Seiten gh, ik durch Sm, Sn ausgedrückt; wenn nun die Dicke jeder Schichte mit x, die Abstände ihrer untern Flächen von S mit h_1, h_2 rc. bezeichnet und dabei vorausgesetzt wird, daß x eine sehr kleine Größe ist, so wird das Volumen der

1ten Schichte durch $h_1^2 . x$

2ten „ „ $h_2^2 . x$

u. s. w. und das der ganzen Pyramide durch $H^2 \times \frac{H}{3}$

gegeben sein; folglich ist:

$$h_1^2 . x + h_2^2 . x + \ldots = \frac{H^3}{3};$$

substituirt man diesen für $h_1^2 . x + h_2^2 . x + \ldots$ erhaltenen Werth in (β_1), so ist das Moment des gesammten Wasserdruckes in Bezug auf MN gleich

$$\frac{H^3 . L . \gamma}{3}.$$

Dividirt man denselben durch den Druck des Wassers (α), so ist

$$\frac{\frac{H^3 . L . \gamma}{3}}{\frac{H^2 . L . \gamma}{2}} = \tfrac{2}{3} H$$

der gesuchte Abstand des Angriffspunktes sämmtlicher Wasserpressungen von der Linie MN, folglich ist dieser Punkt um $\frac{H}{3}$ von der horizontalen Ebene entfernt, in welcher die Kante K liegt, und daher das Moment des gesammten Wasserdrucks in Bezug auf diese Kante gleich

$$\frac{H^2 . L . \gamma}{2} . \frac{H}{3}.$$

Das Moment der Mauerung muß nun augenscheinlich größer als das so eben erhaltene sein, wenn durch den Druck des Wassers keine Drehung um K erfolgen soll. Es ist also

$$\frac{H . L . b^2}{2} . \gamma_1 > \frac{H^3 . L . \gamma}{b}$$

oder

$$b > H \sqrt{\frac{\gamma}{3\gamma_1}} \qquad (\gamma_1)$$

Für den oben angenommenen Fall, wo $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1}{2}$ ist, wird

$$\sqrt{\frac{\gamma}{3\gamma_1}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

und also

$$b > 0{,}408 . H. \qquad (\delta_1)$$

Dieser für b erhaltene Werth ist kleiner als der in (β), folglich muß die Breite einer Wehre allemal größer als $\frac{3}{4}$ H genommen werden.

Die Erfahrung lehrt, daß ein Wehr wenigstens 3 bis 3½ Fuß (oder 1 Meter) breit gemacht werden müsse, damit das Wasser nicht durchsickere. Man nimmt also unter allen Umständen b nie kleiner als 3 — 3½ Fuß an, wenn auch die Wasserhöhe H unter 3 Fuß sein sollte; in allen übrigen Fällen bestimmt man die Breite des Wehrs mittelst der Gleichung (β).

Besteht der Damm, welcher ein Wasserreservoir abschließt, aus aufgeworfenem Erdreich, so macht man seine obere Fläche, Erfahrungen zufolge, 7—8 Fuß breit. Die Böschung oder Abdachung der beiden geneigten Seitenflächen ergiebt sich hingegen durch den natürlichen Abfall des Materials, woraus der Damm gebildet wird, von selbst, und somit auch die Breite der Basis.

88. **Bestimmung der Dicke der Dampfkessel, Leitungsröhren** ꝛc. — Oft findet der Fall statt, daß der hydrostatische Druck einer in einem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit viel beträchtlicher, als derjenige, der durch das Gewicht derselben entsteht, ist, und man also letzteren unberücksichtigt lassen kann. Dies geschieht hauptsächlich, wenn stark gespannte Wasserdämpfe in einem Gefäß enthalten sind, wie z. B. in den Dampfkesseln und Leitungsröhren der Dampfmaschinen. Man berechnet daher die Dicke dieser Gefäße nur für den gegen sie statt findenden Dampfdruck und läßt das Gewicht der darin enthaltenen Flüssigkeit unbeachtet.

Betrachten wir nun einen Theil AB (Fig. 267) der cylindrischen Wandfläche eines Dampfkessels oder einer Leitungsröhre, auf welche der eingeschlossene Dampf einen Druck ausübt, welcher für die Einheit der Fläche gleich p gesetzt werde. In dem Augenblick, wo dieser Druck statt findet, wird der cylindrisch gekrümmte Theil AB um eine gewisse Größe ausgedehnt und in Folge derselben vergrößert sich auch der Halbmesser CA um einen übrigens sehr kleinen Theil.

Diese beiden Größen bezeichnen also die Wege, welche der Widerstand und der Druck durchläuft. Wenn man also diesen mit der Vergrößerung des Halbmessers AC und jenen mit der statt gefundenen Ausdehnung der Wandfläche AB multiplizirt, so bezeichnen diese beiden Produkte die Größe der Arbeit des Drucks und die Größe der Arbeit des Widerstandes, welche augenscheinlich einander gleich seyn müssen und dazu dienen, die Dicke der Wand zu bestimmen, damit diese mit Sicherheit dem statt findenden Druck zu widerstehen im Stande ist.

Bezeichnen wir also den Halbmesser AC mit r, die durch den Druck statt findende Vergrößerung desselben mit ϱ, den Winkel ACB, im Bogen für den Halbmesser $= 1$ ausgedrückt, mit φ, die Dicke AD der Wand mit δ und die Länge desselben, senkrecht auf die Ebene der Zeichnung gemessen, mit l, so ist die Fläche AB gleich

$$r . \varphi . l$$

der Druck auf dieselbe gleich

$$r . \varphi . l \times p$$

und die Größe der Arbeit dieses Drucks gleich

$$r . \varphi . l . p \times \varrho \qquad (\alpha)$$

Der Widerstand in der Wandfläche AB ist, wenn man sich dieselbe aufgewickelt denkt, nach (3. Abth. 69 [β]) gleich

$$A . O$$

Im vorliegenden Falle ist $O = \delta . l$ also

$$A . O = A . \delta . l$$

Die Größe, um welche sich die Wand AB ausdehnt, ist von der Vermehrung des Halbmessers AC abhängig, geht also r in $r + \varrho$ über, so ist dann $AB = (r + \varrho)\, \varphi$, also die statt gefundene Ausdehnung $= (r + \varrho)\, \varphi - r . \varphi = \varrho . \varphi$; daher die Arbeit des Widerstandes gleich

$$A . l \times \varrho . \varphi \qquad (\beta)$$

Dem obigen Raisonnements zu Folge muß nun (α) gleich (β) sein, folglich hat man

$$r . \varphi . l . p . \varrho = A . \delta . l . \varrho . \varphi$$

oder

$$r . p = A . \delta$$

und hieraus

$$\delta = \frac{r . p}{A} \qquad (\gamma)$$

Wenn die Wandfläche geschlossen ist, d. h. einen vollständigen hohlen Cylinder bildet, so ergiebt sich dasselbe Resultat. Denn bezeichnet in diesem Falle MN (Fig. 268) den Querschnitt der ganzen Wandfläche und man behält die vorigen Bezeichnungen bei, so ist der Druck gegen dieselbe gleich

$$2\pi . r . l \times p$$

und die Arbeit dieses Drucks gleich

$$2\pi . r . l . p \times \varrho .$$

Die Größe, um welche sich die ganze Wand ausdehnt, ist

$$2\pi (r + \varrho) - 2\pi . r = 2\pi . \varrho,$$

also die Arbeit des Widerstandes gleich

$$A . \delta . l \times 2\pi . \varrho,$$

daher $2\pi . r . l . p . \varrho = 2\pi . \varrho . A . \delta . l$

oder $r . p = A . \delta$

wie vorhin.

Aus (γ) folgert man, daß die Dicke der Wand proportional mit dem gegen sie statt findenden Druck und mit dem Halbmesser ihrer Krümmung zunimmt. Wenn in dieser Gleichung die Größen δ und r in Metern ausgedrückt werden und p den Druck in Kilogrammen auf den Quadratmeter bezeichnet, so ist für

gewalztes Eisen	$A = 8000000$
Kupferblech	$A = 4000000$
Blei	$A = 340000$
Glas	$A = 500000.$ *)

*) Wenn r_1 in Fußen, δ_1 in Zollen und p_1 in Pfunden irgend eines Staates gegeben ist, so hat man, wenn α das Ver-

Ist der Druck des Dampfes in Atmosphären gegeben, so ist für 1 Atmosphäre $p = 10330$ Kilogramme
„ 2 „ $p = 20660$ „
„ 3 „ $p = 60990$ „
u. s. w. *)

Wenn ein vertikaler Cylinder eine solche Höhe hat, daß die darin enthaltene Flüssigkeit in Betreff des Drucks, den sie gegen die Wand erzeugt, nicht vernachläßigt werden darf, so zerlegt man denselben in Abschnitte und kann dann den Druck gegen jeden derselben und folglich mittelst der Gleichung (γ) ihre Dicke bestimmen. Da man aber in der Regel die Wände eines solchen Cylinders durchaus gleich macht, so muß für p derjenige Druck angenommen werden, der in dem untersten Abschnitt statt findet, um mittelst (γ) die entsprechende Wanddicke zu erhalten.

---

hältniß des Kilogramms zu dem Pfundgewicht und β dasjenige des Meters zu dem Fuß des betreffenden Staates bezeichnet,

$$p = \frac{p_1}{\alpha};\ \delta = \frac{\delta_1}{12.\beta} \text{ und } r = \frac{r_1}{\beta}$$

also
$$\frac{\delta_1}{12.\beta} = \frac{\frac{p_1}{\alpha} \cdot \frac{r_1}{\beta}}{A}$$

oder
$$\delta_1 = 12 \cdot \frac{p_1 . r_1}{\alpha . A};$$

multiplicirt man also die oben gegebene Größe A mit dem in der Anmerkung (Seite 242) für α gegebenen Zahlenwerthe, so erhält man d_1 in Zollen ausgedrückt.

*) Ist p der in Pfunden statt findende Druck auf einen Quadratfuß, so ist in

	Preuß. ℔.	Wiener ℔.	Bayer. ℔.
für 1 Atmosphäre	$p = 2144$	1818	1548
„ 2 „	$p = 4288$	3636	3096
„ 3 „	$p = 6432$	5454	4644

Gewöhnlich ist ein Dampfkessel an seinen beiden Enden durch Böden geschlossen, auf welche wir bis jetzt keine Rücksicht genommen hatten. Wenn diese Böden sich nicht gegen eine feste unverrückbare Ebene stützen, so muß man ihnen eine solche Dicke geben, daß sie ebenfalls mit Sicherheit dem Druck der in dem Kessel enthaltenen Dämpfe zu widerstehen vermögen. Die Bestimmung dieses Druckes ist eine Frage, welche bis jetzt noch nicht mit der erforderlichen Strenge erörtert worden ist; jedoch kann man auf folgende Weise einen aproximativen Werth für die Dicke dieser Böden erlangen, der für die Anwendung ganz ausreichend sein wird.

Bildet nämlich einer der Böden mit dem Cylinder einen einzigen Körper, so kann man von jenem eine Zone ABDC (Fig. 269), deren Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt G zusammenfällt und zur Breite den Halbmesser r hat, — also in Bezug auf G symmetrisch ist — in Betrachtung nehmen und dieselbe als einen prismatischen Körper behandeln, der mit seinen beiden Enden befestigt und in seiner Mitte mit einem Gewicht, das dem Totaldruck der Flüssigkeit gegen jene Zone gleich angenommen wird, belastet ist und dessen Dicke man dann auf dieselbe Weise, wie die Dicke des Schutzbrettes (Anmerk. Seite 311), bestimmt. Diese für die Zone ABDC gefundene Dicke kann man mit Zuversicht auch für die übrigen Theile des Bodens annehmen.

Endlich ist noch ein Fall in Betrachtung zu nehmen, den man unter gewissen Umständen nicht vernachläßigen darf, nämlich den, wo der Druck gegen den mit dem Cylinder fest vereinigten Boden, diesen von jenem abzureißen, strebt.

Bezeichnet man also den gesammten hydrostatischen Druck, so wie denjenigen, welcher von dem Gewicht der Flüssigkeit gegen den Boden entsteht, mit P, und mit δ und r die Dicke der Wandfläche und den Halbmesser des Cylinders, so muß nach [Abth. 3. 69. (β)]

$$A \times 2\pi . r . \delta = P$$

oder

$$\delta = \frac{P}{2\pi . r . A}$$

sein. In dieser Gleichung ist für **A** einer der oben (Seite 319) angegebenen Zahlenwerthe zu setzen, und da in der Regel der Boden durch Nieten mit dem Cylinder vereinigt wird, wodurch sich die zusammenhängende Fläche des Cylinder-Querschnitts um die Hälfte vermindert, so ist statt $2\pi . r . d$ nur $\pi . r . d$ zu setzen. Daher muß eigentlich

$$\delta = \frac{P}{\pi . r . A} \qquad (\delta)$$

gesetzt werden. Für irgend ein anderes Maaß nnd Gewicht ist **A** mit $\frac{\alpha}{\beta^2}$ (Seite 242) zu multipliciren, um δ in diesem Maaß ausgedrückt zu erhalten.

Setzt man in (δ) für **P** seinen durch p (durch den Druck auf die Flächeneinheit) ausgedrückten Werth, so hat man, da die Fläche des Bodens gleich $\pi . r^2$ ist,

$$P = p \times \pi . r^2$$

also

$$\delta = \frac{p . \pi . r^2}{\pi . r . A} = \frac{r . p}{A}$$

wie in (γ), woraus folgt, daß es gleichgültig ist, ob man die Dicke eines Dampfkessels mittelst der Formel (γ) oder (δ) berechnet.

89. Gleichgewicht schwimmender Körper. — Betrachtet man eine in einem Gefäße im Gleichgewicht befindliche Flüssigkeit, so ist es sichtbar, daß jenes nicht gestört wird, wenn man irgend einen Theil **O** (Fig. 270) dieser Flüssigkeit in eine sehr dünne und vollkommen feste gewichtlose Hülle eingeschlossen annimmt. Dem zu Folge kann man also diese eingehüllte Flüssigkeit **O** so betrachten, als wenn sie in einem Gefäße eingeschlossen wäre, und ihr vertikaler Druck, welchen sie von oben nach unten ausübt, ist genau so groß als der vertikale Druck, welchen die umgebende Flüssigkeit von unten nach oben entgegen setzt. Da sich also diese beiden Drückungen gegenseitig vernichten, so verbleibt die Masse **O** an der ihr angewiesenen Stelle oder ist mit

der umgebenden Flüssigkeit im Gleichgewicht. Ersetzen wir die eingeschlossene Flüssigkeit durch einen festen Körper, der genau dasselbe Volumen hat, so wird dieser ebenfalls an seiner Stelle verbleiben, wenn seine Dichtigkeit genau dieselbe, wie die der ihn umgebenden Flüssigkeit ist, weil in diesem Falle sein vertikaler Druck (sein Gewicht) eben so groß, als der vertikale Gegendruck der Flüssigkeit sein wird. Ist aber seine Dichtigkeit größer, als die der ihn umgebenden Flüssigkeit, so ist auch sein vertikaler Druck (sein Gewicht) größer als der vertikale Gegendruck der Flüssigkeit, und er wird sich in die Flüssigkeit einsenken. Ist hingegen seine Dichtigkeit geringer, als die der ihn umgebenden Flüssigkeit, so ist sein vertikaler Druck (sein Gewicht) geringer als der vertikale Gegendruck der Flüssigkeit, er wird also in der Flüssigkeit in die Höhe steigen und auf ihrer Oberfläche schwimmen. Weil nun das Bestreben des Körpers, in der Flüssigkeit nieder zu sinken oder in die Höhe zu steigen, von der Größe des Unterschiedes der ab- und aufwärts wirkenden vertikalen Drückungen abhängt, und diejenige, die in Folge der Wirkung der Flüssigkeit nach aufwärts statt findet, in allen drei Fällen dem Gewicht der ursprünglich eingehüllt angenommenen Flüssigkeit gleich ist, so folgern wir hieraus, daß ein in eine Flüssigkeit eingesenkter Körper genau so viel an seinem Gewicht verliert, als das Volumen der Flüssigkeit, das dem des Körpers gleich ist, wiegt. Dieses durch Archimedes aufgefundene Princip wird in der Physik angewendet, um das specifische Gewicht oder die Dichtigkeit der Körper zu bestimmen.

Aus Vorstehendem nehmen wir nun wahr, daß, wenn ein in einer Flüssigkeit schwimmender Körper im Gleichgewicht sein soll, die Resultante der Vertikalpressungen, welche es von unten nach oben erleidet, derjenigen Resultante gleich und entgegengesetzt sein muß, welche durch die Gesammtwirkung der Schwere auf den Körper entsteht. Die erste Resultante ist, wie wir bereits gesehen haben, dem Gewicht der Flüssig-

keit, die der Körper aus seiner Stelle verdrängt, und die zweite dem Gewicht dieses Körpers selbst gleich. Die beiden Hauptbedingungen für den Gleichgewichtszustand eines schwimmenden Körpers sind also:

1.) daß das gesammte Gewicht desselben dem Gewicht desjenigen Volumens der Flüssigkeit, die durch ihn aus ihrer Stelle verdrängt wird, gleich ist und

2.) daß die Resultanten dieser beiden Gewichte eine vertikale Richtung haben, und da die eine durch den Schwerpunkt des schwimmenden Körpers, die andere durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit geht, so müssen diese beiden Schwerpunkte in derselben Vertikalen liegen.

Ein auf der Oberfläche einer Flüssigkeit schwimmender Körper, der den beiden vorstehenden Bedingungen entspricht und dessen Querschnitt **ABD** (Fig. 271) ist, kann eine dauernde Lage behaupten, oder nicht, d. h, wenn er durch eine äussere Ursache aus seiner ursprünglichen Lage gebracht wird, so strebt er dieselbe wieder einzunehmen oder sich noch mehr davon zu entfernen, und es ist interessant zu wissen, unter welchen Bedingungen dieses geschieht.

Bezeichnet man also die Schwerpunkte des schwimmenden Körpers **ABD** und der durch ihn verdrängten Flüssigkeit mit **G** und **g**, so befinden sich beide in der vertikalen Linie **FH**, wenn der Körper in Ruhe oder im Gleichgewicht ist. Wird nun derselbe aus seiner ursprünglichen Lage in diejenige $A_1B_1D_1$ (Fig. 272) gebracht, indem man ihn um eine auf **ABD** (Fig. 271) senkrechte Axe dreht und ihn alsdann sich selbst überläßt, so ist in dieser neuen Lage $A_1B_1D_1$ (Fig. 272) der Theil A_1da aus der Flüssigkeit heraus- und derjenige D_1db hineingetreten. Ist die statt gefundene Bewegung des Körpers unbeträchtlich, so kann man diese beiden Theile einander gleich setzen, und das Volumen der verdrängten Flüssigkeit ist in der neuen Lage genau so groß als in der ursprünglichen. Der Schwerpunkt **G** des schwimmenden Körpers verbleibt auf der Geraden **Bd**, dagegen

wird sich in der neuen Lage $A_1B_1D_1$ desselben der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit sich in g_1 befinden. Der Gegendruck der Flüssigkeit kann daher in g_1 vereinigt angenommen werden und dieser wird den Körper in der Richtung g_1m aufwärts zu treiben streben. Diese Linie g_1m schneidet aber die ursprüngliche Vertikale dB in K. Liegt nun der Schwerpunkt G, in welchem das gesammte Gewicht des Körpers vereinigt anzunehmen ist, unterhalb dem Punkte K, so wird jener durch sein Bestreben, die tiefste Stelle einzunehmen, den Körper wieder in seine ursprüngliche Lage zurückführen. Liegt hingegen der Schwerpunkt G über dem Punkt K, so wird er durch sein Bestreben, niederzusteigen, die bereits dem Körper gegebene Neigung noch mehr vergrößern und dieser zuletzt umschlagen. Im ersten Falle sagt man, der Körper besitzt die erforderliche *Stabilitait*, d. h., wenn er aus seiner vertikalen Lage gebracht wird, so strebt er, dieselbe wieder einzunehmen. Den Punkt K, welcher dazu dient, diese Eigenschaft zu erkennen, nennt man das *Metacentrum* des schwimmenden Körpers, welches allemal, wenn dieser Stabilität besitzen soll, in der Geraden Bd über dem Schwerpunkt des Körpers liegen muß.

Die Ermittlung der Stabilität schwimmender Körper ist äußerst wichtig für die Schifffahrtskunde. In Vorstehendem ist jedoch nur der Begriff derselben festgestellt, was ausreichend für unsern Zweck ist.

XI.

Von den Pumpen.

90. Saugpumpe. — Obgleich die Beschreibung der Pumpen in jedem Lehrbuch der Physik enthalten ist, so dürfte es doch nothwendig sein, einen kurz gefaßten Begriff von denselben zu geben, bevor wir ihre Eigenschaften, von dem Gesichtspunkt der Mechanik aus betrachtet, erläutern. Ist also **ABCD** (Fig. **273**) eine in eine Flüssigkeit (z. B. in Wasser) eingesenkte, an beiden Enden offene, cylindrische Röhre und das Niveau jener ist durch die Linie **MN** bezeichnet, so ist es augenscheinlich, daß das Wasser im Innern dieser Röhre eben so hoch als ausserhalb derselben steht, weil der atmosphärische Druck eben sowohl auf **MN** als auf **RS** statt findet, und folglich der Druck gegen die Oeffnung **BC** von oben nach unten, sowie von unten nach oben gleich groß ist. Bringt man nun in dem Innern dieser Röhre einen Kolben an, der sich wechselweise auf- und abwärts durch eine von aussen darauf wirkende Kraft bewegen läßt, so hat man eine Vorrichtung, die das Princip der Saugpumpe darstellt. Denn ist der Kolben in einer solchen Lage, daß seine untere Fläche mit der Oberfläche des in der Röhre stehenden Wassers in Berührung ist und man erhebt ihn, so erzeugt sich, oder vielmehr, es strebt sich ein leerer Raum zu erzeugen, der jedoch alsobald durch das eintretende Wasser erfüllt wird. Um einzusehen, durch welchen Druck sich das Wasser mit dem Kolben erhebt, muß man untersuchen, welcher Druck in dem Augenblick, wo der Kolben in die Stellung **ab** gelangt ist, gegen die Oeffnung **BC** statt findet. Von unten drückt gegen dieselbe die Atmo-

sphäre (deren Druck wir mit Π bezeichnen wollen) und das Gewicht der Wassersäule RB, und von oben das Gewicht der Wassersäule $aB = aR + RB$. Der Unterschied dieser beiden Drückungen, oder

$$\Pi + RB - (aR + RB) = \Pi - aR$$

ist die Größe des Druckes, wodurch das Wasser in der Röhre von unten nach oben getrieben wird, d. h. dieser Druck ist dem atmosphärischen Druck, weniger dem Gewicht der Wassersäule aR, gleich. Folglich kann sich das Wasser so lange erheben, bis das Gewicht der über dem Wasserspiegel MN stehenden Wassersäule mit dem atmosphärischen Druck ins Gleichgewicht tritt. Da dieser Druck einer Wassersäule, die 10,33 Meter zur Höhe hat, gleich ist, so schließt man, daß das Wasser dem Kolben nicht weiter folgen wird, wenn es diese Höhe über MN erreicht hat. Obgleich der Gleichgewichtszustand ganz so, wie wir so eben angegeben haben, statt findet, so bestehen doch verschiedene Ursachen, welche das Erheben des Wassers zu der vorhin bezeichneten Höhe nicht gestatten. Gewöhnlich enthält das Brunnenwasser in hundert Theilen ohngefähr fünf Theile Luft, welche sich unmittelbar unter dem Kolben entwickelt, indem an dieser Stelle der Druck der Flüssigkeit gleich Null ist, und wodurch eine gewisse Rückwirkung von unten nach oben sich erzeugt, welche dem Gewicht der Wassersäule aR, die als ein Gegengewicht der Atmosphäre zu betrachten ist, beigefügt werden muß. Diese Rückwirkung läßt sich sehr leicht bestimmen, weil man die Quantität der Luft im natürlichen Zustande, welche eine gewisse Menge Wasser enthält, kennt und nach dem Mariottischen Gesetze ihre Spannung in umgekehrtem Verhältnisse des Raums, welchen sie erfüllt, sich verändert. Zu dieser Rückwirkung ist noch diejenige beizufügen, welche durch die Dämpfe gebildet wird, die sich in dem durch den Kolben erzeugten leeren Raum entwickeln, und deren Spannung in Bezug auf den Standort der Pumpe im Sommer größer als im Winter ist. Endlich schmiegt sich die cylindrische Fläche des Kolbens nie so vollkommen an die innere

Wandfläche des Pumpenstiefels — wie man gewöhnlich den Theil der Röhre nennt, worin sich der Kolben auf- und abbewegt — an, daß nicht zwischen beiden eine geringe Quantität Luft durchdringen könnte; und dies findet selbst statt, wenn sich der Kolben in Ruhe befindet. Jedoch, wenn dieser erhoben wird, so geschieht diese Bewegung gewöhnlich so rasch, daß die über demselben befindliche Luft nicht Zeit genug hat, in solcher Menge zwischen Kolben und Stiefel durchzudringen, daß der unterhalb erzeugte Raum erfüllt wird. Diese erwähnten Ursachen mögen nun einzeln oder zusammen statt finden, so erzeugen sie immer eine Verminderung der Höhe, zu welcher außerdem das Wasser erhoben werden könnte. Für gut construirte Saugpumpen beträgt die Höhe, zu der Wasser gehoben werden kann, höchstens 30 pariser Fuß (9,74 Meter) und für gewöhnliche nur 28 par. Fuß (9,09 Meter). Wird jetzt an dem Kolben eine Klappe mm (Fig. 274) angebracht, welche dazu bestimmt ist, eine in jenem befindliche Oeffnung abwechselnd zu verschließen, um nach Umständen die Verbindung zwischen dem innern Raum der Pumpe und demjenigen über dem Kolben zu unterbrechen oder herzustellen, und am untern Ende der Röhre BC ein Ventil n eingesetzt, das ebenfalls den Zweck hat, abwechselnd die Communikation zwischen dem innern Raum der Pumpe und dem Wasserreservoir zu unterbrechen, so hat man ein vollständiges Bild von einer Saugpumpe. Die Klappe mm (Fig. 275) besteht aus einem Stück Leder, das bei ab auf der obern Fläche des Kolbens befestigt und mit einer runden, darauf befestigten Bleiplatte belastet ist, so daß sie sich nur von unten nach oben öffnen kann; häufig bringt man zwei solcher Klappen auf einem Kolben an, die so angeordnet werden, wie aus Fig. 275 [a] zu ersehen ist. Das Ventil n, dem man gewöhnlich wegen seiner Form den Namen Kegelventil gibt, besteht aus einer mit einem Stiele ab versehenen, kegelrumpfförmig gestalteten Scheibe cd, welche sich in einen innerhalb ebenfalls kegelrumpfförmig gestalteteten Ring fg genau schließend einlegt; beim Spiel dieses Ventils bewegt

sich der Stiel ab in dem am Ringe fg angebrachten Stege pq und erhält dasselbe in seiner Richtung; ein durch den Stiel quer durchgesteckter Stift k verhindert einestheils, daß es nicht aus dem Ringe herausgeworfen werden kann, und anderntheils, daß es sich nur zu einer dadurch bezeichneten Höhe erheben kann.

Man kann nun leicht das Spiel dieser beiden Theile, der Klappe und des Kegelventils, die man zusammen unter den gemeinsamen Namen der Ventile begreift, erkennen. Nehmen wir an, der Kolben bewege sich von dem Boden BC (Fig. 274) der Röhre aus, bis er in die, in der Zeichnung angegebene Lage cd kommt; die Flüssigkeit unter BC wirkt in Folge des ausserhalb statt findenden atmosphärischen Drucks, der jedoch um das Gewicht der Wassersäule BR vermindert ist, gegen das Ventil n, erhebt dieses und hält es so lange geöffnet, bis der Kolben den ihm angewiesenen Weg vollständig durchlaufen und sich der zwischen cd und BC enthaltene Raum mit Wasser erfüllt hat. Die Klappe mm, bleibt während dieser Bewegung durch den darauf statt findenden atmosphärischen Druck geschlossen. Hat der Kolben seinen höchsten Stand erreicht und nehmen wir ferner an, daß er in dem nächsten Augenblick seine Bewegung abwärts wieder beginne, so begegnet er der in die Röhre eingetretenen Flüssigkeit, übt auf dieselbe einen Druck aus, der sich augenblicklich bis zu dem Ventil n fortpflanzt und dieses schließt sich, wenn es nicht schon zuvor, während des Verweilens des Kolbens an seiner höchsten Stelle, durch ihr eigenes Gewicht zurückgefallen ist; gleichermassen wirkt aber die unter dem Kolben befindliche Flüssigkeit gegen die Klappe mm, und diese öffnet sich in Folge des Druckes der Flüssigkeit und desjenigen, welchen die bewegende Kraft auf den Kolben überträgt, und überwältigt den von aussen stattfindenden atmosphärischen Druck. Dem zufolge steigt die zwischen dem Boden der Röhre und der untern Fläche des Kolbens enthaltene Flüssigkeit durch dessen Oeffnung in den über ihm befindlichen Raum der Röhre, und die ganze, zuvor in

dem untern Theil derselben enthaltene Flüssigkeit — mit Abzug eines geringen Theils, der in der Oeffnung des Kolbens stehen bleibt — befindet sich über dem Kolben, wenn dieser seine tiefste Stelle, unmittelbar über dem Ventil n, erreicht hat, und in diesem Augenblick schließt sich auch die Klappe mm_1. Wird jetzt oberhalb des höchsten Punktes, den der Kolben erreicht, in f eine Abflußröhre angebracht, so wird sich das während des Niedersteigens des Kolbens über ihn getretene Wasser im Verlauf seines abermaligen Aufsteigens aus ihr ergießen. Solches ist das Spiel der Saugpumpe, das sich bei dem abwechselnden Nieder- und Aufsteigen des Kolbens wiederholt.

In der Praxis kann der Kolben nur einen mäßigen, durch anderweitige Umstände bestimmten Weg durchlaufen. Derselbe beträgt 5 bis 6 Zoll, wenn die Pumpe durch einen Menschen bedient wird; er steigt aber bis zu 5—6 Fuß, wenn er durch eine Maschine von beträchtlicher Kraftäusserung in Bewegung gesetzt wird.

Es ist hinreichend, wenn nur derjenige Theil der Pumpe, welcher von dem Kolben abwechselnd durchlaufen wird, ein vollkommener, in seinem Innern genau ausgebohrter und ausgeschliffener Cylinder ist. Der übrige Theil der Röhre erfordert nicht denselben Grad von Genauigkeit. Da der Weg, den der Kolben zurücklegt, in der Regel sehr kurz ist und folglich nie die ganze Röhre dC durchläuft, so ist es gerade nicht nothwendig, daß das Ventil, wodurch das Wasser aus dem Reservoir in den Pumpenkörper eintritt, sich in oder unter dem Wasserspiegel MN befinde, sondern es kann auch über diesem angebracht werden.

Die Saugpumpen kann man auf verschiedene Weise anordnen. Eine durch ihre Einfachheit sich empfehlende Methode ist folgende: Zwei hölzerne ausgebohrte Röhren A und B (Fig. 275) von beiläufig $2\frac{1}{2}$—3 Zoll innern Durchmesser sind an ihren beiden einander zugekehrten Enden p und q mittelst eines metallenen hohlen Cylinders C (dem Stiefel) mit einander vereinigt, dieser ist genau ausgebohrt und sein

innerer Durchmesser etwas größer als derjenige der hölzernen Röhren; in ihm bewegt sich der Kolben, weshalb man ihm auch den Namen Sauger beilegt. Durch die über demselben befindliche hölzerne Röhre A ergießt sich das gehobene Wasser, und die unter ihm befindliche B trägt an ihrem obern Ende, wo sie mit dem Stiefel vereinigt ist, das Ventil n; unterhalb ist diese mit einem durchlöcherten metallenen Seiher geschlossen, damit nicht fremdartige, in dem Wasser treibende Körper in den innern Raum der Pumpe gelangen und die Ventile beschädigen können. Der Durchmesser des Kolbens muß deshalb etwas größer als derjenige der Röhren genommen werden, damit der Querschnitt der in denselben angebrachten Oeffnung nicht merklich kleiner als derjenige der Bohrung des untern Theils sei. Wäre jener Querschnitt zu klein, so würde die dadurch entstehende Einziehung des durchdringenden Wassers einen Verlust der lebendigen Kraft oder eine Verminderung der nützlichen Arbeit veranlassen.

Eine andere Anordnung der Saugpumpen findet statt, wenn das Wasserreservoir oder der Brunnen von der Stelle, wo der Pumpenstiefel mit seinen Kolben und Ventilen angebracht werden kann oder muß, entfernt liegt. In diesem Falle macht man die Saugröhre KL (Fig. 276) merklich enger als den Stiefel und läßt sie aus Blei anfertigen, damit man sie, wie es gerade die Oertlichkeit nothwendig macht, leicht biegen kann. Das unter dem Kolben befindliche Ventil n bringt man dann an dem obern Ende dieser gekrümmten Röhre an. Aber ohngeachtet das Spiel des Kolbens einer so construirten Pumpe in einer Höhe über dem Wasserspiegel statt finden wird, die unter der Grenze, bis zu welcher das Wasser durch den atmosphärischen Druck steigt, ist, so kann sich doch der Fall ereignen, daß in Folge der Widerstände der Flüssigkeit in der gekrümmten Röhre das Wasser durch das Ansaugen nicht bis zu dem Stiefel der Pumpe ansteigt, weshalb man in allen den Fällen, wo man das Saugrohr krümmen muß, den senkrechten Abstand zwischen

dem Kolben und dem in Gedanken erweitert gedachten Wasserspiegel geringer als bei einer vertikalstehenden Pumpe nehmen muß.

Wir betrachten nun den Fall, wo das Ventil n (Fig. 277) am untern Ende AB der Saugröhre angebracht ist, die tiefste Stelle des Kolbens durch ab und seine höchste durch a'b' bezeichnet wird. Vor der ersten Ansaugung hat die in dem Raume efhg enthaltene Luft die natürliche Dichtigkeit und diese vermindert sich, wenn der Kolben aus der Lage ab in diejenige a'b' übergeht. Während dieser Bewegung des Kolbens steigt das Wasser in der Röhre eg bis cd und es ist klar, daß jetzt der Druck der in beiden Räumen a'b'ba und efdc verbreiteten Luft geringer als die der äußern, welche auf den Wasserspiegel MN drückt, sein wird, weil die Spannkraft jener und das Gewicht der Wassersäule dh zusammen mit dem atmosphärischen Druck π im Gleichgewicht sein müssen. Wenn der Kolben wieder niedersteigt, so schließt sich das Ventil n und die Klappe in dem Kolben öffnet sich, sobald die zwischen a'b' und cd enthaltene Luft ihre ursprüngliche Dichtigkeit wieder erlangt hat. Folglich hat die in dem Raume efdc eingeschlossene Luft abermals ihre natürliche Dichtigkeit oder ihr Druck ist dem Atmosphärischen gleich, wenn der Kolben in seiner tiefsten Stelle angekommen ist. Bezeichnen wir die Höhe der Wassersäule, welche diesen Druck mißt, mit H, die Höhe derjenigen dh mit h_1, den Raum a'b'ba mit A und denjenigen efgh mit B, so ist nach einem zweiten Hub des Kolbens die Spannung der in A und B enthaltenen, ausgedehnten Luft durch eine Wassersäule, die gleich $H-h_1$ ist, gemessen (wenn man voraussetzt, daß die Wassersäule h_1 ihre Höhe, während der Kolben aufsteigt, nicht verändert), daher nach dem Mariottischen Gesetze

$$H : H-h_1 = A+B : B$$

oder

$$H-h_1 = \frac{H \cdot B}{A+B},$$

weil sich nach diesem Gesetze die Spannungen der Luft im natürlichen und im ausgedehnten Zustande, wie die Höhen H und $H - h_1$ und diese sich umgekehrt wie die Volumen der eingeschlossenen Luft verhalten *).

Der Druck, welcher auf die Fläche gh in Folge des stattgefundenen zweiten Hubs von oben nach unten statt findet, ist also

$$h_1 + \frac{H . B}{A + B},$$

und da der Druck auf dieselbe Fläche von unten nach oben dem atmosphärischen Druck H gleich ist, so hat man

$$H = h_1 + \frac{H . B}{A + B}.$$

Ist nach n Kolbenhüben das Wasser zur Höhe h_n gestiegen und in diesem Falle der Raum B so weit vermindert worden, daß derselbe jetzt gleich b ist, so hat man ebenfalls

---

*) Das Mariottische Gesetz drückt man eigentlich so aus: Der Druck, den eine Flüssigkeit durch die ihr inwohnende elastische Kraft ausübt, ist der Dichtigkeit derselben proportional.

Wenn man also die Drückungen zweier Flüssigkeiten mit P, P_1, ihre Dichtigkeiten mit δ, δ_1 bezeichnet, so ist

$$P : P_1 = \delta : \delta_1 \qquad (1)$$

ferner sind bei gleichem Volumen (Raum) die Dichtigkeiten den Massen proportional; bezeichnet man diese mit M, M_1, so ist

$$\delta : \delta_1 = M : M_1$$

also auch $$P : P_1 = M : M_1 \qquad (2)$$

Sind die Massen der in den Räumen V, V_1 eingeschlossenen Flüssigkeiten gleichgroß, so sind ihre Dichtigkeiten um so geringer, je größer die Räume sind, die sie einnehmen; man hat also

$$\delta : \delta_1 = V_1 : V$$

daher auch $$P : P_1 = V_1 : V \qquad (3)$$

$$H = h_n + \frac{H \cdot b}{A + b};$$

steigt nun das Wasser nicht weiter, so ist die größte von demselben in der Saugröhre erreichbare Höhe

$$h_n = H - \frac{H \cdot b}{A + b} = H\left(1 - \frac{b}{A + b}\right)^{*)} \quad (\alpha)$$

---

*) Wir wollen nun auch eine Saugpumpe, bei der das Ventil n an dem obern Theil ef des Saugrohrs angebracht ist, betrachten. Bezeichnen wir den Raum abb′a′, welchen der Kolben abwechselnd durchläuft, mit A und den Raum zwischen dem tiefsten Stand desselben und dem Ventil n mit a. Wenn daher nach einigen Kolbenhüben das Wasser in der Saugröhre die Höhe h erreicht, so ist die Spannkraft der zwischen dem Ventil n und jener Wassersäule enthaltenen Luft gleich H—h und diejenige, welche sich zwischen demselben Ventile und der tiefsten Stellung des Kolbens befindet, muß augenscheinlich die natürliche Spannkraft der atmosphärischen Luft besitzen. Beginnt nun die aufsteigende Bewegung des Kolbens abermals, so wird sich die zwischen ihm und dem Ventil n befindliche Luft ausdehnen, jedoch dieses noch so lange geschlossen bleiben, bis die Spannkraft dieser Luft derjenigen, die sich unter diesem Ventile in der Saugröhre befindet, gleich ist; im nächsten Augenblick darauf wird es sich, wenn man das Gewicht desselben unbeachtet läßt, erheben. In Folge des fortdauernden Steigens des Kolbens wird die Spannkraft der in dem Stiefel und der Saugröhre eingeschlossenen Luft fortwährend abnehmen und folglich das Wasser in dieser steigen; hat jener seine höchste Stelle erreicht, so wird das Wasser zu der Höhe h_1 in die Saugröhre gestiegen sein.

Durch die folgenden Kolbenhübe wird die Spannkraft der zwischen dem Ventil n und der Wassersäule in der Saugröhre eingeschlossenen Luft immer mehr und mehr abnehmen und endlich, wenn jene die Höhe h_n erreicht hat, wird sich das Ventil n nicht mehr heben, wenn auch das abwechselnde Auf-

Damit nun das Wasser in den Raum des Stiefels gelange, muß die Höhe, um welche sich der Kolben in seiner niedrigsten Stellung über dem Wasserspiegel MN befinden darf, kleiner als H sein.

---

und Niedersteigen des Kolbens fortdauert, d. h. die Luft über und unter dem Ventile n hat nach jedem Kolbenhube dieselbe Spannkraft. Weil nun jetzt die in dem Raum a enthaltene Luft vor dem Beginn eines jeden Hubs die natürliche Spannkraft der atmosphärischen Luft und nach Beendigung derselben, diejenige der Luft in der Saugröhre hat, und zugleich den Raum A erfüllt, so ist nach dem Mariottischen Gesetze

$$H : H - h_n = A : a$$

und hieraus

$$h_n = H - \frac{H \cdot a}{A} = H\left(1 - \frac{a}{A}\right). \qquad (1)$$

Je kleiner nun a ist, desto mehr wird sich die Höhe, zu der das Wasser durch Ansaugung gehoben werden kann, der Höhe H nähern; da jedoch der Kolben nicht auf dem Ventil n aufstoßen darf, so kann a nie gleich Null werden. Der Werth dieser Größe übt auf die Höhe, zu der das Wasser in der Saugröhre steigen wird, einen wesentlichen Einfluß aus und deswegen nennt man sie auch den schädlichen Raum der Saugpumpe. Um denselben möglichst zu vermindern, muß bei gut construirten Saugpumpen das Ventil n allemal an dem obern Theil der Saugröhre angebracht und so angeordnet werden, daß zwischen ihm und dem Kolben nur ein sehr geringer Raum verbleibe und folglich der Werth von a ein Minimum werde.

Wenn für einen Ort der Erde der mittlere Barometerstand b bekannt oder gegeben ist, so hat man allemal

$$H = 13{,}6 \,.\, b,$$

wenn man mit 13,6 das specifische Gewicht des Quecksilbers bezeichnet und daher auch

$$h_n = 13{,}6 \,.\, b \left(1 - \frac{a}{A}\right)$$

91. Saug- und Druckpumpe, und einfache Druckpumpe. — In der Saug- und Druckpumpe besteht der Kolben aus einem durchaus massiven Cylinder ab (Fig. 278). Wenn dieser erhoben wird, so öffnet sich das am obern Ende cd der Saugröhre angebrachte Ventil n, und das Wasser — das man bereits die Saugröhre anfüllend annimmt — tritt in den durch das Aufsteigen des Kolbens gebildeten Raum; geht der Kolben wieder nieder, so schließt sich das Ventil n, und das Wasser wird in Folge des durch den Kolben auf dasselbe hervorgebrachten Druckes aus dem Stiefel in das seitwärts an demselben angebrachte Steigrohr kl getrieben. Damit beim Aufsteigen des Kolbens das in dieser Röhre enthaltene Wasser nicht wieder zurücktreten kann, ist an der Stelle, wo es in den Cylinder AB einmündet, ein zweites Ventil s angebracht, das sich öffnet, wenn der Kolben niedersteigt und durch sein eigenes Gewicht zurückfällt und sich schließt, wenn jener seine tiefste Stelle erreicht hat und während des Aufsteigens desselben geschlossen bleibt.

Die einfache Druckpumpe besteht aus einem Cylinder (dem Stiefel) AB (Fig. 279), der oberhalb durch eine Scheidewand ab, in welcher ein nach aufwärts sich öffnendes Ventil m eingesetzt ist, geschlossen, dagegen unterhalb offen ist und der sich gänzlich unter dem Wasserspiegel MN des Reservoirs oder des Brunnens befindet. Die mit demselben verbundene Steigröhre EF geht entweder vertikal aufwärts oder ist gekrümmt, wie es die Fig. 279 zeigt. Ihr Kolben besteht aus einem hohlen Cylinder, in dem oberhalb eine benfalls nach aufwärts sich öffnendes Ventil n angebracht ist und der sich in dem Raum abcd des Cylinders bewegt. Während seines Niedersteigens ist das Ventil m geschlossen und dasjenige in dem Kolben geöffnet, so daß das Wasser in den Raum abcd eindringen kann. Hat der Kolben seine tiefste Stelle erreicht, so schließt sich das Ventil n in Folge seines Gewichtes und bleibt während des Aufsteigens des Kolbens geschlossen, dagegen öffnet sich das in der Scheide-

wand ab angebrachte Ventil m und gestattet dem über dem Kolben befindlichen Wasser den Eintritt in die Steigröhre EF. Die Höhe, zu welcher das Wasser mittelst einer solchen Pumpe erhoben werden kann, hängt einzig von der Größe der an der Kolbenstange wirkenden, bewegenden Kraft ab.

Da in dieser Pumpe die Kolbenstange pq sich nicht wie bei der Saugpumpe in dem Innern des Körpers derselben befindet, so ist diese bei gewöhnlichen Druckpumpen auf die Weise, wie es die Fig. 280 zeigt, mit dem Kolben vereinigt.

92. **Arbeit der Pumpen.** — Die Anordnungen der Pumpen variren in's Unendliche, aber es bestehen zwei Grundregeln, die sich auf alle Arten anwenden lassen, nämlich

1) das Volumen Wasser, das bei jedem Hub gehoben wird, ist etwas kleiner als der Raum des Stiefels, den der Kolben durchläuft; weil bei jedem Hub theils zwischen dem Kolben und der innern Wandfläche des Stiefels etwas Wasser durchdringt, theils durch das Zurückfallen der Ventile ein geringer Theil des Wassers zurücktritt.
2) Die an der Kolbenstange entwickelte Arbeit ist der Arbeit der Reibung und der übrigen Widerstände, und dem Produkt gleich, das man erhält, wenn das Gewicht des während der Dauer eines Hubes gehobenen Wassers mit der Höhe der Ausflußmündung (Ausgußröhre) über dem Wasserspiegel des Reservoirs oder Brunnens multiplicirt wird.

Dieses Produkt — die gehobene Wassermenge mit der angezeigten Höhe multiplicirt — stellt augenscheinlich nach unsern entwickelten Principien den nützlichen Effekt dar, was wir jedoch für jeden besondern Fall beweisen können.

In den Druckpumpen erzeugt der Kolben im Niedersteigen keine nützliche Arbeit; aber im Aufsteigen hat er den Druck einer Wassersäule, deren Basis der Fläche des Kolbens und deren Höhe dem Abstand zwischen der Ausgußröhre und der obern Fläche des Kolbens gleich ist, zu über-

winden. Bezeichnen wir jene mit A, die Höhe der Ausgußmündung über dem Wasserspiegel MN des Reservoirs mit h und den veränderlichen Abstand zwischen MN und der obern Fläche des Kolbens mit y, so ist $h + y$ die ganze Höhe der Wassersäule, welche von oben nach unten auf den Kolben drückt. Dieser wird aber auch von unten nach oben durch das Gewicht einer Wassersäule, welche dieselbe Basis und y zur Höhe hat, gepreßt; er hat also einen von oben nach unten statt findenden Widerstand, der durch die Differenz $(h + y) - y$ oder durch h gemessen wird, zu überwinden. Wenn man also mit B die Größe des Kolbenhubes und mit γ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser bezeichnet, so ist die Größe der bewegenden Kraft, welche während des Aufsteigens des Kolbens thätig sein muß, durch

$$A . h . \gamma$$

und die nützliche Arbeit durch

$$A . h . \gamma \times B$$

ausgedrückt. Nun ist aber

$$A . h . \gamma \times B = A . B . \gamma \times h$$

und $A . B . \gamma$ das Gewicht des Wassers, welches in dem Raum, den der Kolben während eines jeden Hubes durchläuft, enthalten ist, oder das während dessen Dauer in die Höhe steigt. Es ist folglich die nützliche Arbeit der Druckpumpe genau die oben in 2) angegebene Größe.

In der Saug- und Druckpumpe ist der Kolben, wenn er in die Höhe steigt, von oben nach unten mit dem Druck der Atmosphäre belastet, und von unten nach oben findet gegen denselben eine Pressung statt, die dem atmosphärischen Druck, weniger dem Gewicht einer Wassersäule, deren Höhe y_1 durch den Abstand des Kolbens von dem Wasserspiegel MN gemessen wird, gleich ist. Die wirkliche Pressung, welcher der Kolben von oben nach unten ausgesetzt ist, wird also durch

$$H - (H - y_1) = y_1$$

gegeben sein, und wenn er in dem Zeitelemente den sehr kleinen Weg u_1 durchläuft, so ist seine in demselben geleistete nützliche Arbeit gleich

$$A \,.\, y_1 \,.\, \gamma \times u_1 = A \,.\, u_1 \,.\, y_1 \times \gamma;$$

$A \,.\, u_1$ ist das Volumen, welches der Kolben in dem Zeitelement durchläuft, daher $A \,.\, u \times y_1$ dessen Moment in Bezug auf die Linie MN. Die Summe aller dieser, für die aufeinander folgenden Werthe y_2, y_3 rc. genommenen, Momente, multiplicirt mit γ, repräsentiren aber die ganze nützliche Arbeit während eines Kolbenhubes; wenn man diesen mit B und den Abstand seines Schwerpunktes von MN mit y bezeichnet, so ist:

$$A \,.\, u_1 \times y_1 + A \,.\, u_2 \times y_2 + \text{rc.} = A \,.\, B \times y,$$

folglich die nützliche Arbeit während eines Kolbenhubes gleich

$$A \,.\, B \,.\, y \,.\, \gamma.$$

Während des Niedergehens ist der Kolben mit dem Gewicht der in der Steigröhre enthaltenen Wassersäule, die die Fläche des Kolbens zur Basis hat, belastet; bezeichnet man also den vertikalen Abstand der Ausgußröhre über dem Schwerpunkt des Raums, welchen der Kolben in jedem Hub durchläuft, mit z, so ist die nützliche Arbeit des Kolbens während seines Niedersteigens gleich

$$A \,.\, z \,.\, \gamma \times B,$$

also während eines vollständigen Wechsels der Pumpe — worunter man ein einmaliges Auf- und Niedersteigen versteht — die nützliche Arbeit

$$A \,.\, B \,.\, y \,.\, \gamma + A \,.\, B \,.\, z \,.\, \gamma = (y + z)\, A \,.\, B \,.\, \gamma;$$

$y + z$ ist aber nichts anderes als die Höhe h, um welche sich die Ausflußröhre über dem Wasserspiegel MN befindet; die nützliche Arbeit während eines Wechsels der Pumpe ist daher gleich

$$A \,.\, B \,.\, \gamma \times h,$$

also dasselbe Ergebniß, wie bei der einfachen Druckpumpe. Auf gleiche Weise führt man auch den Beweis für die einfache Saugpumpe.

Zu dem gefundenen nützlichen Effekt einer Pumpe muß man in dem Falle, wo sich das Wasser mit großer Geschwin-

digkeit aus der Ausgußöffnung ergießen soll (wie z. B. bei Feuerspritzen), noch die Größe der dem Wasser eingedrückten, lebendigen Kraft hinzufügen, indem diese mit einer Arbeit, die einen Theil des nützlichen Effekts bildet, correspondirt, und welche im Gegentheil verloren geht, wenn die dem Wasser ertheilte größere Geschwindigkeit unnöthig ist.

Man kann nun auch beurtheilen, bei welcher von diesen drei Arten von Pumpen die Arbeit am ungleichsten statt findet. Betrachtet man eine einfache Druckpumpe, so findet man, daß beim Aufsteigen des Kolbens derselbe durch das Gewicht der zwischen der Ausgußöffnung k und dem Wasserspiegel MN (Fig. 279) enthaltenen Wassersäule gepreßt wird, und also die an der Kolbenstange angebrachte, bewegende Kraft diese und das Gewicht des Kolbens zu erheben hat; beim Niedersteigen des Kolbens begünstigt das Gewicht des Kolbens die Wirkung der bewegenden Kraft, welche während der Dauer dieser Bewegung nichts weiter als die Reibungswiderstände zu überwinden hat. Aus der Vergleichung beider Ergebnisse folgert man, daß bei der Druckpumpe die Arbeit der bewegenden Kraft sehr ungleich ist. Bei der Saug- und Druckpumpe ist die Arbeit während des Aufsteigens des Kolbens ebenso groß als während des Niedersteigens desselben, wenn $y = z$ oder $y = \frac{h}{2}$ ist; man schließt hieraus: daß, wenn der mittlere Stand des Kolbens um die halbe Höhe der Wassersäule über dem Wasserspiegel des Reservoirs erhoben ist, die Arbeit dieser Pumpe sehr regelmäßig sein wird. Endlich findet man, daß bei der Saugpumpe die bewegende Kraft beim Niedersteigen des Kolbens ausser der Reibung keinen andern Widerstand zu überwinden hat, daß hingegen während des Aufsteigens des Kolbens ein Widerstand zu überwältigen ist, der dem Gewicht der zwischen dem Wasserspiegel des Reservoirs und der Ausgußmündung enthaltenen Wassersäule gleich ist. Es ist also die Wirkung dieser Pumpe sehr ungleichmäßig und ihre nützliche Arbeit äussert sie nur während des Aufsteigens des Kolbens.

Man regulirt die Wirkung der Saugpumpen und der Druckpumpen auf zweierlei Weise. Entweder versieht man den Balancier ab (Fig. 281), mittelst dessen die bewegende Kraft auf die Kolbenstange bd übertragen wird, an dem einen Ende a mit einem Gegengewicht Q, welches der Hälfte des, beim Aufsteigen des Kolbens, zu überwindenden Widerstandes gleich ist (3. Abth. 46) und das auf- oder niedersteigt, wenn der Kolben sich ab- oder aufwärts bewegt; oder man bringt bei Saug- und Druckpumpen ein Luftreservoir — einen sogenannten Windkessel — mit denselben in der Art in Verbindung, wie es Fig. 282 zeigt. Anstatt daß dann das Wasser unmittelbar aus dem Stiefel in die Steigröhre eintritt, gelangt es zuerst in den mit Luft erfüllten Raum C und steigt in demselben z. B. bis zur Linie lm, so daß die, zwischen diesem Niveau des Wassers und dem obern Theil des Gefäßes, zusammengepreßte Luft in Folge ihres Bestrebens, sich wieder bis zu dem ursprünglichen Raum auszudehnen, das Wasser in die Steigröhre hinein drückt und in derselben in die Höhe treibt. Damit das in dem Luftreservoir eingepreßte Wasser bei der entgegengesetzten Bewegung des Kolbens nicht wieder in den Stiefel der Pumpe zurücktreten kann, ist bei o ein Ventil angebracht. Wenn also der Kolben aufsteigt, so schließt sich das Ventil o und das in jenem enthaltene Wasser wird durch die Federkraft der darin eingeschlossenen, comprimirten Luft in die Höhe getrieben und ergießt sich continuirlich durch die Ausflußöffnung, während dieses Ausgießen unterbrochen würde, wenn der Windkessel C nicht vorhanden wäre. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, daß die darin enthaltene Luft in einem solchen Grade comprimirt sei, daß ihre Federkraft in dem Moment, wo der Kolben in seiner höchsten Stelle anlangt, größer als der Gegendruck der in der Steigröhre enthaltenen Wassersäule ist. Die Feuerspritzen sind mit einem solchen Windkessel versehen; sie bestehen gewöhnlich aus zwei Saug-Druckpumpen (Fig. 283), welche das Wasser in einen gemeinschaftlichen Windkessel B hineinpumpen, von wo aus dasselbe durch die darin com-

primirte Luft in das Steigrohr hineingetrieben wird und aus diesem als ein continuirlicher Strahl heraustritt und in die Höhe steigt, oder durch einen Schlauch, welcher mit jenem verbunden ist, an den Ort, wo man es braucht, hingeleitet wird.

Gut construirte Pumpen leisten eine Arbeit, die höchstens zwei Drittel von derjenigen der bewegenden Kraft beträgt, indem diese theils durch den Reibungswiderstand des Kolbens und den Widerstand der Ventile, theils durch die größere oder geringere Quantität des zurückweichenden und durch die Trägheit des zu erhebenden Wassers, die bei jedem Hub zu überwinden ist rc., modificirt wird. Um den größten Effekt zu erlangen, muß man auch vermeiden, das Wasser höher zu heben und demselben eine größere Geschwindigkeit mitzutheilen, als für einen vorgegebenen Zweck nöthig ist, weil dadurch ein Verlust an lebendiger Kraft entsteht. Obgleich man jede Saug-Druck-Pumpe entfernt von dem Wasserreservoir placiren kann, so muß man diese Entfernung doch nie unnöthiger Weise vergrößern, da der Widerstand des in den Röhren befindlichen Wassers mit der Länge derselben zunimmt und folglich den nützlichen Effekt vermindert. Auch die Einziehungen, welche durch die Gestalt der Ventile in dem durchströmenden Wasser erzeugt werden, veranlassen eine Effektverminderung, wie wir später bei der Betrachtung der Bewegung der Flüssigkeiten sehen werden.

93. Hydraulische Presse und Heber. — Die hydraulische Presse besteht aus einem sehr starken, massiven Kolben A (Fig. 284), welcher sich in einem ebenfalls sehr starken, hohlen Cylinder bewegt und an seinem obern Ende eine Platte mn trägt, worauf man die zu pressenden Gegenstände auflegt und die sich gegen den Quertheil des Gestelles, worin diese Vorrichtung angebracht ist, stemmen. Das Wasser tritt unter dem Kolben A durch eine Röhre B und wird mittelst einer der oben beschriebenen Saug-Druckpumpen eingetrieben, die jedoch einen Kolben a von sehr kleinem Durchmesser hat. Wenn der Druck gegen den Kol-

ben a im Gleichgewicht mit demjenigen gegen A ist, so stehen diese beiden Pressungen im umgekehrten Verhältniß ihrer Flächen $\pi . r^2$ und $\pi . R^2$, wenn r und R die Halbmesser beider Kolben a und A bezeichnen. Der Druck auf den kleinen Kolben wird ausserdem noch durch einen Hebel bd übertragen, und man kann also nach Belieben den Druck, welchen der Kolben A auszuüben hat, vergrößern. Man nimmt leicht wahr, daß bei der hydraulischen Presse die Arbeit der bewegenden Kraft, der nützlichen Arbeit und der Arbeit der Reibungswiderstände — die hier sehr beträchtlich sind — zusammengenommen gleich ist.

Obgleich der Heber weniger aus dem Gesichtspunkte des Gleichgewichtes, als aus dem der Bewegung zu betrachten ist, so ist doch seine Beschreibung — wegen seiner Analogie mit den Pumpen — hier an ihrem Platze.

Nehmen wir an, eine gebogene Röhre ACB (Fig. 285), deren beide Schenkel eine parallele Lage zu einander haben, sei in zwei neben einander befindliche Behälter FG, EK, von denen jeder mit einer Flüssigkeit (mit Wasser), und zwar FG bis LM und EK bis MN, angefüllt ist, so eingetaucht, daß sich die Scheidewand EG zwischen den Schenkeln der Röhre befindet. Die Flüssigkeit wird in diese eintreten und sich so weit in jedem erheben, bis sie mit der eingeschlossenen Luft im Gleichgewicht ist. Erzeugt man nun in dieser Röhre mittelst Ansaugens an demjenigen Ende, das in die tiefer stehende Flüssigkeit eintaucht, eine Leere, so wird in dem Falle, daß ihr höchster Punkt C weniger als 10,33 Meter über dem Niveau LM erhoben ist, die in FG enthaltene Flüssigkeit in der Röhre AC, in Folge des atmosphärischen Drucks, aufsteigen, in den Theil CB übertreten, somit die ganze Röhre anfüllen und dann aus dem offenen Ende B so lange ausfließen, bis beide Oberflächen der in den Behältern enthaltenen Flüssigkeiten in dieselbe horizontale Ebene zu liegen kommen. Diese Art der Bewegung der Flüssigkeit in der gekrümmten Röhre, der man den Namen Heber gegeben hat, läßt sich auf folgende Weise erklären. Der Druck, welcher in der obersten



Stelle C der Röhre ABC in der Richtung von m nach n auf die Flächeneinheit statt findet, ist dem auf das Niveau LM statt findenden atmosphärischen Druck, weniger dem Druck der in der Röhre von A bis C enthaltenen, vertikalen Flüssigkeitssäule gleich; bezeichnet man jenen, wie früher, mit H und die Höhe der Stelle C über dem Niveau LM mit h, so ist augenscheinlich $H - h$ der Druck in C in der Richtung vom m nach n. Ferner ist der Druck in C von n gegen m dem auf das Niveau MN statt findenden, atmosphärischen Druck, weniger dem Druck der in der Röhre CB enthaltenen, vertikalen Flüssigkeitssäule gleich. Bezeichnet man diese oder den Abstand zwischen C und MN mit h′, so ist der in C von n gegen m statt findende Druck gleich $H - h'$. Der Druck in C, in Folge dessen sich also die Flüssigkeit von m nach n bewegt, ist daher

$$H - h - (H - h') = h' - h.$$

Wenn also h′ größer als h, oder, was dasselbe ist, wenn das Niveau in EK niedriger als dasjenige LM in FG ist, so wird der Ausfluß aus dem offenen Ende B der Röhre statt finden, jedoch in dem Augenblick aufhören, wenn $h' = h$ geworden ist. Ist h größer als die Flüssigkeitssäule, welche dem atmosphärischen Druck das Gleichgewicht hält, so kann kein Ausfluß aus der Oeffnung B mehr statt finden, weil dann der Gegendruck der Flüssigkeitssäule in AC größer als der atmosphärische Druck ist, weshalb in C eine Leere entsteht, und folglich kein Uebertritt der Flüssigkeit von dem einen Schenkel in den andern mehr statt finden kann.

In der Praxis kann die Leere in der Röhre, wenn diese bedeutende Dimensionen hat, nicht wohl durch gewöhnliches Ansaugen erzeugt werden; man verfährt daher so, daß man zuerst die beiden Oeffnungen A und B verstopft und dann durch eine in C angebrachte Oeffnung die beiden Schenkel der Röhre mit der Flüssigkeit anfüllt und die darin enthaltene Luft durch dieselbe Oeffnung entweichen läßt; hierauf verschließt man diese wieder und öffnet dagegen die beiden un-

tern in **A** und **B**, worauf das Ausfließen in **B** beginnt und so lange fortdauert, als die Oeffnung **A** sich unter der Oberfläche der in **FG** enthaltenen Flüssigkeit befindet, und die Flüssigkeit in **EK** niedriger als in **FG** steht. Die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit aus der Oeffnung **B** ausfließt, ist, wie wir später sehen werden, gleich $\sqrt{2g(h'-h)}$. So construirte Heber wendet man mit Erfolg zum Entleeren von Wasserbehältnissen, die eine solche Lage haben, daß sich zwischen ihnen und der tiefer liegenden Stelle, in welche das Wasser abgeleitet werden soll, ein Hinderniß befindet, an.

XII.

Von der Bewegung der in Gefäßen, Kanälen und Strömen enthaltenen Flüssigkeiten.

94. Von dem Ausfluß des Wassers aus einem Gefäße im Allgemeinen. — Ein Gefäß **ABDC** (Fig. 280), dessen Boden eine horizontale Lage hat und dessen Seitenwände senkrecht auf jenem stehen, sei bis zu der Linie **AB** mit Wasser erfüllt. Bringt man in horizontaler Richtung eine kleine Oeffnung **ab** in einer der vertikalen Seitenwände an, so wird der in der Flüssigkeit statt findende Druck, der um so größer ist, je tiefer sich diese Offnung unter dem Wasserspiegel befindet, dieselbe zum Ausfließen veranlassen und dieses Ausfließen der Flüssigkeit wird um so schneller und in einer Quantität, die um so größer ist, statt finden, je näher sich die Oeffnung dem Boden des Gefäßes befindet. Das in der Einheit der Zeit — in der Sekunde — ausgeflossene Quantum Wasser nennt man die Wassermenge.

Das aus der Oeffnung in der vertikalen Wand ausfließende Wasser bildet einen continuirlichen Strahl, der dieselbe Krümmung annimmt, die ein mit derselben Geschwindigkeit, die das ausfließende Wasser in der Oeffnung besitzt, horizontal geworfener Körper beschreibt und welche bekanntlich eine Parabel, deren Scheitel sich in der Oeffnung **ab** befindet, ist. In allen Punkten dieser Kurve strebt die Schwere, die Geschwindigkeit zu vermehren, aber in der Oeffnung **ab** selbst hängt diese einzig von dem Drucke der in dem Gefäße

enthaltenen Flüssigkeit ab. Wenn die Oeffnung in dem Boden des Gefäßes — in a′b′ — angebracht ist, so nimmt der Wasserstrahl, abwärts gerichtet, eine vertikale Richtung an. Ist hingegen diese Oeffnung in der horizontalen Wandfläche cd (Fig. 287), die von unten nach oben von der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit gedrückt wird, in a″b″ angebracht, so erhebt sich der Strahl vertikal aufwärts, und die Erfahrung beweist, daß er sich zu einer Höhe (in luftleerem Raume) erhebt, die dem Abstand des Wasserspiegels AB von der horizontalen Wandfläche cd gleich ist und woraus man nach (1. Abth. 64) folgert, daß die Elemente der Flüssigkeit in der Oeffnung a″b″ eine Geschwindigkeit, die mit der Fallhöhe Bc correspondirt, besitzen, was man nun auch durch das Princip der Arbeit beweisen kann.

95. Geschwindigkeit des durch eine kleine, in einer dünnen Wand angebrachte, Oeffnung frei ausfließenden Wassers. — Wenn die Ausflußmündung ab (Fig. 288) geschlossen ist, so ist der Druck gegen dieselbe einer Wassersäule gleich, welche diese Ausflußmündung zur Grundfläche und den Abstand h ihres Mittelpunktes von dem Wasserspiegel AB zur Höhe hat. Streng genommen wird dieser Druck noch um die auf dem Wasserspiegel statt findende, atmosphärische Pressung vermehrt; da diese aber ebenfalls von aussen gegen die Wandfläche, in welcher die Oeffnung angebracht ist, statt findet, so vernichten sich in dem Augenblick, wo der Ausfluß beginnt, diese beiden, in entgegengesetzter Richtung hervorgebrachten Pressungen und der Druck, welcher das Ausfließen des Wassers veranlaßt, ist in Wirklichkeit kein anderer, als der, welcher durch die über der Oeffnung stehende Wassersäule erzeugt wird. In Folge desselben wird in dem Moment, wo die Ausflußmündung geöffnet wird, die in dem Gefäße ABCD enthaltene Flüssigkeit in Kurven gegen die Oeffnung getrieben; die Ausfluß-Geschwindigkeit nimmt so lange zu (was übrigens sehr rasch und folglich in einer sehr kleinen Zeit geschieht), bis die Bewegung in der Flüssigkeit durchaus

gleichförmig geworden ist. Dies ist der Augenblick, wo wir die Bewegung der Flüssigkeit betrachten und dabei voraussetzen, daß in jedem Zeitelement genau so viel Wasser von oben zugehe, als durch die Oeffnung ausfließt, so daß man den Wasserstand über der Ausflußmündung als unveränderlich betrachten kann. Wird nun angenommen, daß von diesem Augenblick an die Bewegung permanent geworden ist, so ist leicht wahrzunehmen, daß jedem Element der Flüssigkeit im Niedersteigen von AB gegen CD, gleichviel welche Kurve es beschreibt, durch die Schwere eine Arbeit eingedrückt wird, die gleich $p.h$ (2. Abth. 12) ist, wenn man das Gewicht eines solchen Elementes mit p bezeichnet. Nennt man also v die Geschwindigkeit, womit dieses Element in dem Wasserspiegel AB anlangt und V diejenige, womit es aus der Oeffnung ab tritt, so ist

$$\frac{p}{g}(V^2 - v^2)$$

die Zunahme der lebendigen Kraft des betrachteten Elementes, während es den vertikalen Weg h durchläuft. Dasselbe gilt auch von allen übrigen Elementen der Flüssigkeit, die in derselben Zeit — z. B. in einer Sekunde — in der Ausflußmündung anlangen, und man erkennt ohne Mühe, daß, wenn P das Gewicht des in einer Sekunde ausfließenden Wasserquantums bezeichnet,

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2)$$

die Zunahme der lebendigen Kraft dieser Wassermenge, während sie den Weg h zurücklegt, ausdrückt, und daß die derselben durch die Schwere eingedrückte Arbeit gleich $P.h$ ist. Man hat also nach dem Princip der lebendigen Kräfte

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2) = 2P.h$$

oder

$$V^2 - v^2 = 2g.h.$$

Ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, indem sie in das Gefäß eintritt, sehr klein oder $v = 0$, so wird

$$V^2 = 2g.h$$

oder
$$V = \sqrt{2g.h}. \qquad (\alpha)$$

Diese Formel hat Torricelli, ein Schüler Galilei's, zuerst gefunden. Dieselbe zeigt, daß die Geschwindigkeit des aus der Ausflußmündung strömenden Wassers von der Höhe abhängig ist, um welche sich der Wasserspiegel über der Oeffnung befindet und welche man deshalb die **Druckhöhe** nennt. Man nimmt ferner aus (α) wahr, daß diese Geschwindigkeit zugleich diejenige ist, die ein von der Höhe h (der Druckhöhe) frei herabfallender Körper am Ende seines Falles erlangt. Die Größe g drückt die am Ende der ersten Sekunde durch die Schwere erzeugte Geschwindigkeit aus und ist gleich 9,809 Meter. *)

Bei dem in Vorstehendem erhaltenen Resultat (α) ist die Anfangsgeschwindigkeit v vernachläßigt worden. Wir werden im folgenden Paragraphen das Ergebniß kennen lernen, wenn diese Geschwindigkeit nicht vernachläßigt werden darf.

96. Ausfluß unter irgend einem beliebigen Druck. — Man hat bis hieher vorausgesetzt, daß der auf den Wasserspiegel ausgeübte Druck, der sich von oben nach unten bis zu dem Querschnitt der Ausflußmündung fortpflanzt, die atmosphärische Pressung sei und daß diese durch diejenige, welche von aussen gegen die Ausflußmündung statt findet, vernichtet wird. Wenn aber diese beiden Pressungen verschieden sind, so ist es augenscheinlich, daß die Ausflußgeschwindigkeit nicht mehr dieselbe ist, die man im vorigen Paragraphen gefunden hat. Wenn z. B. die Ausflußmündung so angebracht ist, daß sich das in dem Gefäße enthaltene Wasser, statt in die *atmosphärische* Luft, in

*) Im Preußischen Maaß ist g = 31,25 Fuß
" Östreichischen " " g = 31,03 "
" Bayerischen " " g = 33,61 "

ein anderes, zum Theil mit Wasser angefülltes Gefäß ergießt und der Wasserstand in diesem von der Art ist, daß die Ausflußmündung nicht nur von dem Wasser bedeckt ist, sondern dieses auch noch um die Höhe $dm = h_1$ (Fig. 289) über ihrem Mittelpunkt m steht, so werden die ausfließenden Wasserelemente mit einer von der Höhe h_1 abhängigen Kraft zurück gedrückt, und die wirkliche Druckhöhe der Ausflußgeschwindigkeit ist daher nur $h - h_1$. Denn man kann annehmen, daß die Elemente der Flüssigkeit nur durch die Höhe, welche der Differenz der Höhen beider Wasserspiegel über der Ausflußmündung gleich ist, niedersteigen und daß, wenn diese Differenz gleich Null wird, gar kein Ausfluß statt findet. Ueberhaupt kann man beweisen, daß die Ausflußgeschwindigkeit immer von der Differenz der gegen die Ausflußmündung von innen und von aussen statt findenden Pressungen abhängig ist.

Es sei ABDC (Fig. 290) ein Gefäß, das mit einer Flüssigkeit angefüllt ist, auf welche von oben ein Druck entweder mittelst eines Kolbens AB oder auf irgend eine andere Weise statt findet und zwar mit einer Kraft, die auf die Flächeneinheit bezogen, gleich p ist. Wir wollen nun bestimmen, mit welcher Geschwindigkeit die Flüssigkeit aus der Oeffnung ab ausströmen wird. Der auf dieselbe von innen stattfindende Druck, welcher die Bewegung begünstigt, ist aus drei Theilen zusammengesetzt, nemlich 1) aus dem Druck p; 2) aus dem Druck der Atmosphäre und 3) aus dem Druck, welcher von der Höhe des Wasserstandes über der Oeffnung ab abhängt. Wenn sich die Flüssigkeit ins Freie ergießt, so ist der Druck, welcher sich dieser Bewegung von aussen entgegensetzt, der atmosphärische Druck; folglich ist die Resultante des Druckes der Differenz dieser beiden von innen und von aussen stattfindenden Drückungen gleich. Bezeichnet man also die Höhe der Flüssigkeit in dem Gefäße mit h, das Gewicht ihrer Raumeinheit mit γ, so ist $p + \gamma h$ der Druck, von dem die Größe der Ausflußgeschwindigkeit abhängig ist, oder wodurch dieselbe bestimmt wird. Um ihn

in einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die Flächeneinheit und deren Höhe dann die stattfindende Druckhöhe ist, auszudrücken, muß man den auf die Flächeneinheit statt findenden Druck p in eine Flüssigkeitssäule, die man sich über der Flächeneinheit des Kolbens AB stehend denkt, umwandeln. Bezeichnet man ihre Höhe mit h_1, so ist augenscheinlich

$$\gamma h_1 = p$$

oder

$$h_1 = \frac{p}{\gamma}.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit V gehört nun einer Flüssigkeitssäule an, deren Oberfläche um $h + h_1$ sich über dem Mittelpunkt der Ausflußmündung befindet. Daher ist nach (α) des vorigen Paragraphen

$$V = \sqrt{2g\,(h + h_1)} = \sqrt{2g\left(h + \frac{p}{\gamma}\right)};$$

jedoch in der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit in AB *sehr klein* ist.

Wir können diesen Fall unmittelbar beweisen. Nehmen wir an, der Kolben bewege sich so, daß alle Punkte seiner Fläche dieselbe Geschwindigkeit haben und in dem Zeitelement von AB nach A′B′ gelangen. Fließt nun in derselben Zeit durch die Oeffnung ab das Volumen abb′a′ der Flüssigkeit aus, so ist es augenscheinlich, daß, wenn dieselbe unzusammendrückbar ist, die beiden Volumen ABDC und A′B′DCabb′a′ einander gleich sind, und wenn man den ihnen gemeinschaftlichen Theil A′B′DC von beiden wegnimmt,

$$ABB'A' = abb'a'$$

sein wird. Weil nun die Bewegung des Kolbens parallel mit seiner Oberfläche statt findet, so kann man das Volumen ABB′A′ durch

$$F \times AA'$$

ausdrücken, wenn F die Fläche des Kolbens und AA′ den von ihm durchlaufenen Weg (in dem Zeitelement) bezeichnet.

Nimmt man ferner an, daß in der Nähe der Oeffnung ab die Bewegung der Flüssigkeit ebenfalls in der Art statt findet, daß die Schichten derselben parallel mit sich selbst niedersteigen, so ist das Volumen abb'a' ein Prisma, das durch

$$f \times aa'$$

ausgedrückt werden kann, wenn f den Querschnitt der Oeffnung ab und aa' den durchlaufenen Weg (in dem Zeitelement) der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet. Geht also die Bewegung in AB und ab in der Art vor sich, daß in diesen Stellen die Flüssigkeitsschichten parallel mit sich selbst niedersteigen, so ist — abgesehen davon, welche Bewegung die dazwischen befindlichen Schichten haben —

$$F \times AA' = f \times aa'.$$

Die durch den Kolben und durch die Flüssigkeit in der Oeffnung ab gleichzeitig durchlaufenen Wege AA' und aa' sind den Geschwindigkeiten v und V, die der Kolben und die ausfließende Flüssigkeit besitzen, proportional; daher hat man auch

$$F \cdot v = f \cdot V. \qquad (\alpha)$$

Man muß sich jetzt erinnern, daß die zwischen AB und ab enthaltene Flüssigkeit in dem Zeitelement eine Zunahme an lebendiger Kraft erlangt, welche der doppelten Arbeit gleich ist, die durch das Niedersteigen des Kolbens und durch die Wirkung der Schwere auf die ganze Masse der Flüssigkeit in derselben Zeit erzeugt wird. Diese drei verschiedenen Werthe sind also zu bestimmen und in eine Gleichung zu setzen.

Die Zunahme der lebendigen Kraft ist leicht zu erlangen. Denn bleibt, wie vorausgesetzt wird, die Bewegung permanent, so ist die lebendige Kraft von dem Theil A'B'DC zu Anfang und zu Ende des Zeitelementes dieselbe; bezeichnet man sie mit U und das Gewicht der Schichte ABB'A' = abb'a' mit q, so ist zu Anfang des Zeitelementes die gesammte lebendige Kraft gleich

$$\frac{q}{g} \cdot v^2 + U \qquad (\beta)$$

und am Ende desselben gleich

$$U + \frac{q}{g} \cdot V^2; \qquad (\gamma)$$

folglich ist die Zunahme der lebendigen Kraft, während der Kolben von AB nach A′B′ gelangt, der Differenz von (γ) und (β) gleich; man hat also

$$U + \frac{q}{g} \cdot V^2 - \frac{q}{g} \cdot v^2 - U = \frac{q}{g} (V^2 - v^2). \qquad (\delta)$$

Die Arbeit des Kolbens, indem er von AB nach A′B′ niedersteigt, ist

$$p \cdot F \times AA'. \qquad (\varepsilon)$$

Wenn die Flüssigkeit ABDC in dem Zeitelement in den Raum A′B′DCabb′a′ übertritt, so ist dies ebensoviel, als ob die Flüssigkeitsschichte ABB′A′ in den Raum abb′a′ gelangt wäre, weil die in dem Raum A′B′DC befindliche Flüssigkeit, als unbeweglich an ihrer Stelle verbleibend, angenommen werden kann. Bezeichnet man also den Abstand zwischen A′B′ und ab mit h, so ist die Arbeit der Schwere gleich

$$q \cdot h. \qquad (\zeta)$$

Man hat also, indem man die in (δ, ε und ζ) gefundenen Ausdrücke nach dem Princip der lebendigen Kräfte verbindet,

$$\frac{q}{g} (V^2 - v^2) = 2p \cdot F \times AA' + 2q \cdot h$$

oder $$V^2 - v^2 = 2g \left(\frac{p \cdot F \times AA'}{q} + h \right). \qquad (\eta)$$

Bezeichnet γ die Gewichtseinheit der Flüssigkeit, so ist

$$q = \gamma \cdot F \times AA',$$

also $$F \times AA' = \frac{q}{\gamma};$$

substituirt man in (η) für $F \times AA'$ den eben gefundenen Werth, so ist

$$V^2 - v^2 = 2g\left(\frac{p}{\gamma} + h\right); \qquad (\vartheta)$$

und wenn die Geschwindigkeit des Kolbens so gering ist, daß sie vernachläßigt werden kann, so hat man

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p}{\gamma} + h\right)}. \qquad (\vartheta_1)$$

Wenn der Querschnitt der Oeffnung ab ausser dem atmosphärischen Druck von aussen gegen innen noch durch einen Druck, der für die Flächeneinheit gleich p' ist, gepreßt wird, so muß man $\frac{p}{\gamma}$ um $\frac{p'}{\gamma}$ oder p um p' vermindern, wie aus folgender Entwicklung hervorgeht. Der äussere Druck auf den Querschnitt ab ist gleich $p.f$ und dessen Arbeit in dem Zeitelement gleich

$$p.f \times aa'. \qquad (\varkappa)$$

Das Gewicht von $abb'a'$ ist aber

$$q = \gamma . f \times aa'$$

und hieraus $\qquad f \times aa' = \frac{q}{\gamma};$

substituirt man diesen für $f \times aa'$ gehaltenen Werth $\frac{q}{\gamma}$ in ($\varkappa$), so ist die Arbeit des gegenwirkenden Druckes

$$\frac{p.q}{\gamma}.$$

Diese Größe muß in der Gleichung (ϑ) oder (ϑ_1) in Abzug gebracht werden, daher ist in diesem Falle

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p - p'}{\gamma} + h\right)}. \qquad (\lambda)$$

Man wird nun leicht wahrnehmen, wie man in allen ähnlichen Fällen zu verfahren hat, um die Ausflußgeschwin-

digkeit V zu erhalten. Das in Vorstehendem statt gefundene Raisonnement bleibt dasselbe, wenn der Kolben sich in anderer, z. B. statt in vertikaler in horizontaler Richtung, bewegt; in diesem Falle ist die Druckhöhe h, der Abstand des obersten Punktes der Flüssigkeit über dem Mittelpunkt der Ausflußmündung.

Hat der Kolben eine Geschwindigkeit, die nicht vernachlässigt werden darf, so erlangt man den Werth von V durch folgende Betrachtung.

In (α) haben wir gefunden, daß

$$Fv = f \, . \, V$$

ist; hieraus erhält man

$$v = \frac{f \, . \, V}{F} \text{ oder } v^2 = \frac{f^2 . V^2}{F^2},$$

daher $V^2 - v^2 = V^2 - \frac{f^2 . V^2}{F^2} = \left(1 - \frac{f^2}{F^2}\right) V^2$;

setzt man $1 - \frac{f^2}{F^2} = K$, substituirt den für $V^2 - v^2$ erhaltenen Werth $K . V^2$ in (ϑ) und entwickelt V, so ist

$$V = \frac{\sqrt{2g\left(\frac{p}{\gamma} + h\right).}}{\sqrt{K}} \qquad (\mu)$$

F ist in allen Fällen größer als f, daher K jederzeit ein ächter Bruch und folglich dieser neue Werth von V größer als der in (ϑ_1) erhaltene. Wenn f den zwanzigsten Theil von F beträgt, so ist $K = \frac{399}{400}$, folglich $\sqrt{K} = 0{,}998$, eine Größe, die allemal, wo $F > 20f$ ist, ganz füglich der Einheit gleich gesetzt werden darf, weshalb man in allen ähnlichen Fällen statt (μ) die Gleichung (ϑ_1) zur Berechnung der Ausflußgeschwindigkeit anwenden kann.

Wir schließen diesen Paragraphen mit der Bemerkung, daß die Wirkung des Kolbens durch irgend einen andern,

auf die Oberfläche AB der Flüssigkeit statt findenden, Druck ersetzt werden kann, wie wir im Verfolg dieses Werkes sehen werden.

97. Ausflußgeschwindigkeit der Gase oder Dämpfe in dem Fall, wo der innerhalb des Gefäßes statt findende Druck nur wenig den äußern übertrifft. — Dasjenige, was in Vorhergehendem vorausgesetzt wurde,

1) daß das Volumen der ausfließenden Flüssigkeit derjenigen gleich ist, die in der obern Schichte einfließt,

2) daß die Dichtigkeit der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit in allen Punkten dieselbe ist,

ist nur für die wenig zusammendrückbaren Flüssigkeiten, wie z. B. für das Wasser, wahr, aber nicht für Gase, weil dann der Druck im Innern des Gefäßes in der Nähe des Kolbens größer, als in der Nähe der Oeffnung ist. Die Flüssigkeit ist also in jener Stelle dichter als in dieser, d. h. gleiche Gewichtstheile der Flüssigkeit nehmen in der Nähe des Kolbens einen kleinern Raum ein als in der Nähe der Ausflußmündung. Jedoch kann man die Differenz dieser in den beiden Volumen ABB'A' und abb'a' statt findenden Pressungen vernachläßigen, wenn der innere Totaldruck, welchen die Flüssigkeit theils von der Atmosphäre, theils von andern Einwirkungen erleidet, den äussern Druck um weniger als 0,1 übertrifft. Ein Verhältniß, das in vielen Fällen der Anwendung, z. B. bei Gebläsen, ausreichend ist und für welche man dann, wenn die Geschwindigkeit der obern Schichte oder des Kolbens sehr klein ist, die Größe der Ausflußgeschwindigkeit mittelst der in [§. 96 (λ)] gegebenen Formel berechnen kann. Nur muß man die darin enthaltene Größe γ, die von dem Barometerstand und von der Temperatur abhängig ist, erst mittelst folgender Gleichung

$$\gamma = \frac{1{,}709 \cdot h}{1 + 0{,}00375 \cdot n}, \text{*)} \qquad (\alpha)$$

*) Diese Gleichung, welche in oben stehender Form das Gewicht eines Kubikmeters atmosphärischer Luft für den Barometer-

worin h den Barometerstand in Decimaltheilen des Meters, und n die Zahl der Grade des hunderttheiligen Thermome-

---

stand h und die Temperatur n gibt, erlangt man folgendermassen:

Wenn der Barometerstand 0,76 Meter beträgt und die Temperatur = 0 ist, so wiegt ein Kubikmeter atmosphärischer Luft 1,2991 Kilogramme, welches Gewicht wir mit γ_0 bezeichnen wollen, so daß also

$$\gamma_0 = 1{,}2991 \text{ Kilogramme} \qquad (1)$$

ist. Nach Gay-Lussac's Versuchen dehnt sich die Luft (und alle Gase) bei constantem Druck für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers um 0,00375 ihres Volumens aus. Bezeichnet man also für n solche Grade, das Gewicht eines Kubikfußes Luft mit γ_1, so ist für diese Temperatur das Volumen $1 + 0{,}00375 \cdot n$, also nach dem Mariottischen Gesetz

$$\gamma_1 : \gamma_0 = 1 : 1 + 0{,}00375 \cdot n.$$

Da nun $\gamma_0 = 1{,}2991$, so erhält man

$$\gamma_1 = \frac{1{,}2991}{1 + 0{,}00375 \cdot n}.$$

Dies ist das Gewicht eines Kubikmeters atmosphärischer Luft bei einem 0,76 Meter hohen Barometerstande und n Grade Temperatur. Bezeichnet man dieses Gewicht für einen andern Barometerstand h mit γ, so hat man ebenfalls nach dem Mariottischen Gesetz

$$h : 0{,}76 = \gamma : \gamma_1;$$

hieraus $$\gamma = \frac{\gamma_1 \cdot h}{0{,}76} = \frac{1{,}2991 \cdot h}{0{,}76\,(1 + 0{,}00375 \cdot n)};$$

da nun $$\frac{1{,}2991}{0{,}76} = 1{,}709$$

ist, so erhält man

$$\gamma = \frac{1{,}709 \cdot h}{1 + 0{,}00375 \cdot n}$$

wie oben.

In Deutschland wird gewöhnlich zur Messung der Temperatur das Reaumür'sche Thermometer angewendet, das vom



ters bezeichnet, berechnen. Die Ausflußmenge ist dann gleich f . V; ihr Volumen ist unter dem im Innern statt findenden Druck zu verstehen, und ihr Gewicht ist daher gleich f . V . γ.

Nullpunkt bis zum Siedpunkt in 80 Theile getheilt wird. Für einen solchen Grad beträgt die Ausdehnung der atmosphärischen Luft (und der übrigen Gase) 0,00469 des ganzen Volumens. In diesem Fall hat man für einen Barometerstand = 0,76 Meter und für n solche Grade Temperatur

$$\gamma_1 = \frac{1,2991}{1 + 0,00469 \,.\, n} \qquad (2)$$

und für einen Barometerstand = h

$$\gamma = \frac{1,709 \,.\, h}{1 + 0,00469 \,.\, n} \qquad (3)$$

Um nun das Gewicht eines Kubikfußes atmosphärischer Luft in Decimaltheilen des Pfundes ausgedrückt zu erhalten, hat man in (1) den Theil rechts mit $\frac{\alpha}{\beta^3}$ zu multipliciren, wenn α die Verhältnißzahl des Kilogrammes zu dem Pfunde und β diejenige des Meters zu dem Fuße des betreffenden Staates bezeichnet. Denn man hat

β^3 Kubikfuß = 1 Kubikmeter
α Pfund = 1 Kilogramm;

daher das Gewicht eines Kubikfußes Luft oder

$$\gamma_0 = \frac{\alpha}{\beta^3} \cdot 1,2991 \text{ Pfund.} \qquad (4)$$

Ebenso erhält man

$$\gamma_1 = \frac{\alpha}{\beta^3} \cdot \frac{1,2991}{1 + 0,00469 \,.\, n} \qquad (5)$$

und

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta^3} \cdot \frac{1 \cdot 709 \,.\, h}{1 + 0,00469 \,.\, n}, \qquad (6)$$

wo jedoch in letztrer Gleichung h *noch in Decimaltheilen des Meters* ausgedrückt ist. Will man h, wie es beinahe durch ganz Deutschland Sitte ist, in pariser Zollen ausgedrückt in die Rechnung einführen, so hat man, da

Wenn das Gewicht der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit sehr klein ist, so kann h in Bezug auf $\frac{p-p'}{\gamma}$ vernachläßigt werden, und man hat dann

$$V = \sqrt{2g\,\frac{p-p'}{\gamma}}. \qquad (\beta)$$

$$h \text{ Meter} = \frac{h'}{36{,}9412} \text{ paris. Zoll}$$

sind,

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta^3} \cdot \frac{1{,}709 \,.\, h'}{36{,}9412\,(1 + 0{,}00469 \,.\, n)}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta^3} \cdot \frac{0{,}04624 \,.\, h'}{1 + 0{,}00469 \,.\, n}. \qquad (7)$$

In dieser Gleichung bezeichnet also:

h' den Barometerstand in pariser Zollen,
n die Anzahl der Grade nach Reaumür,
α die Verhältnißzahl der Kilogramme und
β „ „ der Meters
zu dem zu Grund gelegten Pfund und Fuß.

Nach (4) erhält man für 0,76 Barometerhöhe und 0° Temperatur das Gewicht eines

preuß. Kubikfußes atmosphärischer Luft = 0,0859 preuß. Pfd.
wien. „ „ „ = 0,0733 wien. Pfd.
bayer. „ „ „ = 0,0577 bayer. Pfd.

Will man mittelst der obigen Gleichung [§. 96. (λ)] die Ausflußgeschwindigkeit irgend einer andern Gasart berechnen und man bezeichnet mit q das Gewicht eines Kubikmeters des gegebenen Gases, so wird dann

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta^3} \cdot \frac{q \,.\, h'}{0{,}76 \,.\, 36{,}9412\,(1 + 0{,}00469 \,.\, n)}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta^3} \cdot \frac{q \,.\, h'}{28{,}0753\,(1 + 0{,}00469 \,.\, n)} \qquad (8)$$

für kohlensaures Gas ist q = 1,9805
„ Sauerstoffgas „ q = 1,4323
„ Wasserstoffgas „ q = 0,0894.

Diese schon durch Daniel Bernoulli gegebene Formel gibt jedoch ein fehlerhaftes Resultat, wenn p um mehr als $\frac{1}{10}$ größer als p′ ist.

98. Ausflußgeschwindigkeit der Gase, wenn der innere Druck beträchtlich größer als der äussere ist. — Um die wahre Formel für diesen Fall zu erhalten, kann man ganz füglich die sehr kleine Druckhöhe h oder die Wirkung der Schwere, sowie die Geschwindigkeit der obern Schichte vernachläßigen, so daß dann die während des Zeitelements statt gefundene Zunahme der lebendigen Kraft einfach durch $\frac{q}{g} . V^2$ ausgedrückt ist, wenn q das Gewicht des in dieser Zeit ausgeflossenen Volumens ABB′A′ (Fig. 290) bezeichnet und also $q = ABB'A' \times \gamma$ ist. Das Volumen abb′a′ ist jetzt nicht mehr demjenigen ABB′A′ gleich, aber beide stehen, nach dem Mariottischen Gesetz, in umgekehrtem Verhältniß der äussern und innern Pressungen zu einander, so daß

$$\text{Volumen } ABB'A' : \text{Volumen } abb'a' = p' : p$$

ist; daher Volumen $abb'a' = \frac{p}{p'} \times ABB'A'$. (α)

Die verschiedenen Größen der Arbeit, welche theils die Bewegung begünstigen, theils derselben entgegen wirken, sind:

1) die Arbeit von dem Druck p,
2) diejenige, welche dadurch entsteht, daß das Volumen ABB′A′ in dasjenige abb′a′ übergeht.

Beide begünstigen die Bewegung; endlich

3) die Arbeit von dem Druck p′, welche der Bewegung entgegen wirkt.

Die Größe der durch den Druck p erzeugten Arbeit ist:

$$p . F \times AA' = p \times \text{Volumen } ABB'A',$$

und diejenige, welche durch den Druck p′ entsteht, ist:

$$p' . f \times aa' = p' \times \text{Volumen } abb'a'.$$

Bezeichnet man nun die noch unbekannte Arbeit, welche durch den Uebergang des Volumens ABB'A' in dasjenige abb'a' erzeugt wird, mit X, so ist die gesammte, in einem Sinne geleistete Arbeit

$p \times$ Volumen $ABB'A' - p' \times$ Volumen $abb'a' + X$,

also nach dem Princip der lebendigen Kräfte

$$\frac{q}{g}.V^2 = 2p \times \text{Vol.}\, ABB'A' - 2p' \times \text{Vol.}\, abb'a' + 2X;$$

substituirt man in dieser Gleichung für das Volumen abb'a' den in (α) dafür gefundenen Werth, so erhält man

$$\frac{q}{g}\, V^2 = 2p \times \text{Vol.}\, ABB'A' - 2p \times ABB'A' + 2X.$$

Die durch die Pressungen p und p' erzeugten Arbeiten vernichten sich also gegenseitig, und die lebendige Kraft $\frac{q}{g}.V$ entwickelt sich daher einzig durch die Ausdehnung des Gasvolumens ABB'A', indem in diesem die Pressung p in diejenige p' übergeht. Man hat folglich

$$\frac{q}{g}.V^2 = 2X. \qquad (\beta)$$

Die Arbeit X ist augenscheinlich dem ursprünglichen Volumen des Gases proportional; denn enthält dieses 2, 3 .. n mal die Raumeinheit, so ist auch jene 2, 3 .. nmal größer. Um daher X zu erlangen, braucht man nur zu wissen, wie groß die in dem Zeitelement geleistete Arbeit eines Kubikfußes Gas ist, wenn in demselben die Pressung oder Spannung p in diejenige p' übergeht. Bezeichnet man sie mit T, so ist die von dem Volumen ABB'A' erzeugte Arbeit

$$X = ABB'A' \times T,$$

oder da $ABB'A' \times \gamma = q$ ist

$$X = \frac{q}{\gamma}.T. \qquad (\gamma)$$

Denkt man sich jetzt den Kubikfuß Gas in eine Röhre eingeschlossen, deren Querschnitt die Flächeneinheit (1 Quadratfuß) ist, so wird dieses bei der Spannung p einen Längenraum gleich einem Fuß (die Längeneinheit) einnehmen. Geht hierauf die Spannung p in p' über, so wird sich die Länge der Gassäule um eine Größe $= \lambda$ vermehren; das ursprüngliche und das jetzige Volumen verhält sich also wie $1 : 1 + \lambda$.

Nach dem Mariottischen Gesetze hat man nun

$$1 : 1 + \lambda = p' : p$$

und hieraus $$\lambda = \frac{p - p'}{p'}.$$

Diese Größe bezeichnet den, in Folge der Ausdehnung des Gases, in dem Zeitelement durchlaufenen Weg. Setzt man die Größe der Spannung in der Mitte dieses Weges $= y$, so hat man, wenn $\frac{p - p'}{p'}$ in zwei gleiche Theile getheilt wird, ebenfalls in Folge des Mariottischen Gesetzes

$$1 : 1 + \frac{p - p'}{2p'} = y : p$$

und hieraus $$y = \frac{2pp'}{p + p'}.$$

Es sind somit die zu Anfang, in der Mitte und zu Ende des Weges statt findenden Spannungen des Gases durch p, $\frac{2pp'}{p + p'}$ und p' ausgedrückt, und da der durchlaufene Weg, wenn die Spannung p in diejenige $\frac{2pp'}{p + p'}$ übergeht, gleich $\frac{p - p'}{2p'}$ ist, so erhält man mittelst des bekannten Simson-

schen Theorems *)

$$T = \frac{1}{3} \cdot \frac{p - p'}{2p'} \left(p + 4 \cdot \frac{2p \cdot p'}{p + p'} + p'\right);$$

wird dieser Werth in (γ) und hierauf (γ) in (β) substituirt, so ist

$$V = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{p - p'}{3p'} \left(p + \frac{8p \cdot p'}{p + p'} + p'\right)}. \quad (\delta)$$

Hiebei darf nicht übersehen werden, daß die Größe γ unter dem Wurzelzeichen die Dichtigkeit (oder das Gewicht der Raumeinheit) des Gases im Innern des Gefäßes bezeichnet, und daß die Dichtigkeit γ_1 desselben in dem Moment, wo es ausströmt, mit dem äussern Druck p' correspondirt. Man hat daher

$$\gamma_1 : \gamma = p' : p$$

und hieraus

$$\gamma_1 = \gamma \cdot \frac{p'}{p}.$$

Das Gewicht des in einer Sekunde ausströmenden Gases ist also gleich

$$f \cdot V \cdot \gamma \cdot \frac{p'}{p};$$

wenn dabei die Correction wegen der Contraction des Strahles — wovon später gesprochen werden soll — vor der Hand unberücksichtigt gelassen wird.

Beispiele über die Anwendung der in Vorstehendem enthaltenen Formeln in Betreff der Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit aus sehr kleinen Oeffnungen in einer dünnen Wand.

1) Das Gefäß enthalte Wasser und die Oberfläche desselben werde durch einen Kolben oder auf irgend eine

---

*) Den Beweis von dem Thomas Simson'schen Theorem, das für ähnliche Entwicklungen, wie die obige, von so großer Wichtigkeit ist, werden wir an geeigneter Stelle des 1. Bandes beifügen.

andere, von dem atmosphärischen Druck unabhängige Weise mit einer Kraft gepreßt, die für den bayr. Quadratzoll $1\frac{1}{4}$ bayr. Pfund betrage; der Wasserspiegel befinde sich 12 bayr. Fuß über dem Mittelpunkt der Oeffnung. Man soll die Geschwindigkeit, mit der das Wasser aus der Oeffnung strömt, bestimmen.

Nach der Formel (§. 96. λ) hat man

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p - p'}{\gamma} + h\right)}.$$

p' ist der atmosphärische Druck Π; dagegen ist p aus diesem und dem gegebenen Druck ($1\frac{1}{4}$ ℔) zusammengesetzt. Es ist also

$$p - p' = 144\,(1\tfrac{1}{4} + \Pi - \Pi) = 180\ ℔,$$
$$h = 12\ \text{Fuß};$$

ferner ist nach (Seite 306) $\gamma = 44{,}4$

und nach (Seite 349) $g = 33{,}6$;

daher

$$V = \sqrt{67{,}2\left(\frac{180}{44{,}4} + 12\right)}$$
$$= 36{,}31\ \text{bayr. Fuß.}$$

2) Das Gefäß sei mit atmosphärischer Luft erfüllt, auf welche mittelst eines Kolbens ein Druck, der gleich $\frac{1}{11}$ der Atmosphäre ist, statt finde. Man soll die unter diesem Druck sich ergebende Ausflußgeschwindigkeit in preußischen Fußen und in der Voraussetzung bestimmen, daß h unberücksichtigt gelassen werde, der Barometerstand 28 par. Zoll und die Temperatur 8° R betrage.

Hier hat man nach (§. 97. β)

$$V = \sqrt{2g\,\frac{p - p'}{\gamma}}. \qquad (1)$$

Der Druck p ist $1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11}$ Atmosphären;
" " p' = 1 "

Es ist also der barometrische Druck im Innern des Gefäßes $= 28 \times \frac{12}{11} = 30\frac{6}{11}$ par. Zoll; dies ist der Zahlenwerth von h' in [Anmerk. Seite 359. (7)]; ferner ist $\alpha = 2{,}138..$; $\beta = 3{,}186..$ Daher

$$\gamma = \frac{2{,}138}{(3{,}186)^3} \cdot \frac{0{,}04624 \cdot 30\frac{6}{11}}{1 + 0{,}00469 \cdot 8}$$
$$= 0{,}0978 \text{ preuß. ℔.}$$

Da nun $p - p' = \frac{1}{11}$ Atmosphäre und für 1 Atmosphäre (Anmerk. Seite 320) der Druck auf 1 preuß. Quadratfuß 2144 ℔ beträgt, so ist

$$p - p' = \frac{1}{11} \times 2144 = 194{,}9$$

und nach (Seite 349) $g = 31{,}25$.

Substituirt man diese für γ, $p - p'$ und g gefundenen Werthe in (1), so wird

$$V = \sqrt{62{,}5 \cdot \frac{194{,}9}{0{,}0978}}$$
$$= 352{,}9 \text{ preuß. Fuß.}$$

3) Das Gefäß sei abermals mit atmosphärischer Luft erfüllt und auf dieselbe finde mittelst eines Kolbens ein Druck statt, der $\frac{1}{8}$ Atmosphäre gleich ist. Man soll unter denselben Bedingungen wie 2) die Ausflußgeschwindigkeit, in Wiener Fußen ausgedrückt, bestimmen.

In diesem Beispiele hat man nach (§. 98. δ)

$$V = \sqrt{\frac{g}{3\gamma} \cdot \frac{p - p'}{p'} \left(p + \frac{8p \cdot p'}{p + p'} + p'\right)}.$$

Um nun V zu erhalten, müssen zuerst die Werthe von γ. p und p' bestimmt werden.

Da der Druck im Innern des Gefäßes (unmittelbar unter dem Kolben) um $\frac{1}{8}$ größer als der atmosphärische Druck ist, so hat man

$$p = 1 + \tfrac{1}{5} = \tfrac{6}{5} \text{ Atmosphären.}$$
$$p' = \quad 1 \quad \text{„}$$

Es ist also der barometrische Druck im Innern des Gefäßes gleich $28 \times \frac{6}{5} = 33\frac{3}{5}$ par. Zoll. Dieser Werth ist für h' in [Anmerk. Seite 359. (7)] zu setzen; da ferner $\alpha = 1{,}785\ldots$, $\beta = 3{,}163\ldots$ so hat man

$$\gamma = \frac{1{,}785\ldots}{(3{,}163)^3} \cdot \frac{0{,}04624 \cdot 33\frac{3}{5}}{1 + 0{,}00469 \cdot 8}$$
$$= 0{,}0843 \text{ Wiener Pfund.}$$

Nach (Seite 320) ist der atmosphärische Druck auf einen wiener Quadratfuß gleich 1818 wiener Pfund,

also
$$p = 1818 \times \tfrac{6}{5} = 2181{,}6$$
$$p' = 1818$$
$$p - p' = 363{,}6$$
$$p + p' = 3999{,}6$$
$$\frac{8p \cdot p'}{p + p'} = 7933{,}1$$

und nach (Seite 349) $g = 31{,}03$,

daher

$$v = \sqrt{\frac{31{,}03 \cdot 363{,}6}{3 \cdot 0{,}0843 \cdot 1818}(2181{,}6 + 7933{,}1 + 1818)}$$
$$= 541{,}1 \text{ wien. Fuß.}$$

Der Ueberschuß, um welchen die im Innern des Gefäßes statt findende Pressung größer als die äussere ist, wird gewöhnlich durch das unter dem Namen Monometer bekannte Instrument angegeben. Eine in der Seitenwand des Gefäßes **AB** (Fig. 291) angebrachte, heberförmig gebogene und an beiden Enden offene Röhre efg enthält entweder Wasser oder Quecksilber (in der Regel letzteres). Auf dasselbe drückt in dem Schenkel fg die äussere, und in dem Schenkel if die eingeschlossene und gepreßte Luft; die zwischen den Höhen des Quecksilbers in beiden Schenkeln statt

findende Differenz **ih** drückt die Höhe derjenigen Quecksilbersäule aus, welche mit dem Ueberschuß der innern Pressung im Gleichgewicht ist. Bezeichnet man daher die Höhe **ih** mit h_o, die Höhe der Quecksilbersäule, welche dem äussern atmosphärischen Druck entspricht, mit h, und den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratfuß mit P, so ist

$$h : h + h_o = P : p$$

und hieraus
$$p = \frac{h + h_o}{h} \cdot P.$$

99. Hypothetische und wirkliche Ausflußmenge aus einer in einer dünnen Wand angebrachten Oeffnung. — Die Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit durch die Oeffnung in einem Gefäße führt zu der Auflösung einer interessanten Frage; nämlich: welches Volumen oder Gewicht der Flüssigkeit in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Sekunde, ausströmt? — man nennt das in dieser Zeit erhaltene Flüssigkeitsquantum die Ausflußmenge. Die Rechnung würde sehr leicht auszuführen sein, wenn die Länge AA' (Fig. 292), welche in der Sekunde die oberste Schichte AB durchläuft, bekannt wäre; da dieß jedoch nicht immer der Fall ist, so kann man die Ausflußmenge durch die in der Oeffnung ab statt findende Ausflußgeschwindigkeit bestimmen, weil dieselbe bei permanenter Bewegung als constant oder gleichförmig bleibend vorausgesetzt wird. Wenn man also von der Einwirkung der Schwere abstrahirt, so werden die Elemente der Flüssigkeit zu Anfang der Zeit (der Sekunde), für welche man die Ausflußmenge bestimmen will, sich in ab und zu Ende derselben in $a'b'$ befinden; das in der Zeiteinheit ausgeflossene Volumen ist also ein Prisma, das die Oeffnung $ab = f$ zur Grundfläche und die Geschwindigkeit $bb' = V$ zur Höhe hat. Bezeichnet also M die Quantität der in einer Sekunde ausgeströmten Flüssigkeit, so ist

$$M = f \cdot V.$$

Die so ausgedrückte Ausflußmenge nennt man die hypothetische. Stimmt nun diese mit der, welche man durch Versuche erhält und die man die wirkliche nennt, überein? — Da den obigen Rechnungen folgende Voraussetzungen zu Grunde liegen, nämlich:

1) daß die Oeffnung ab im Vergleich mit dem Querschnitt der Schichte AB sehr klein ist,
2) daß weder im Gefäße noch ausserhalb desselben ein Hinderniß vorhanden ist, wodurch der Ausfluß beeinträchtigt wird, so daß also die Bewegung als durchaus continuirlich betrachtet werden kann,
3) daß keine Reibung zwischen den Wänden des Gefäßes und der Flüssigkeit statt finde, endlich
4) daß die Flüssigkeit in der obersten Schichte in parallelen Fäden, die alle dieselbe Geschwindigkeit v besitzen, anlange und daß die Fäden der ausströmenden Flüssigkeit gleiche Geschwindigkeit V besitzen,

so kann man hieraus leicht folgern, daß die hypothetischen und wirklichen Ausflußmengen von einander verschieden sein werden, weil die Bewegung der Flüssigkeit nicht in allen Fällen den angenommenen Hypothesen gemäß statt findet.

Die wirkliche Ausflußmenge erhält man dadurch, daß man das aus einem Gefäße ausfließende Wasser in einem andern, genau mensurirten Gefäße auffängt und die in einer, zwei oder drei Minuten erhaltene Quantität der Flüssigkeit durch die Zahl der Sekunden dividirt, die in der, während der Dauer des Ausflusses, verflossenen Zeit enthalten sind. Die Ausflußgeschwindigkeit direkte zu messen, ist jedoch unmöglich, weil man die Elemente der Flüssigkeit während ihres Ausflusses nicht der Beobachtung unterstellen kann. Dennoch darf man annehmen, daß die meisten der obigen Bedingungen erfüllt sind, wenn das Gefäß eine durchaus regelmäßige Form, folglich weder Erweiterungen noch Verengungen hat; die Ausflußöffnung im Vergleich mit dem Querschnitt des Gefäßes sehr klein ist (gleichviel, ob sie in dem Boden oder in der vertikalen Seitenwand angebracht ist); die Wand

selbst nur eine sehr geringe Dicke besitzt und die Flüssigkeit sich frei in die Luft ergießt. Wenn man also unter solchen Voraussetzungen mit h die Druckhöhe der Flüssigkeit bezeichnet, so erhält man die mittlere Ausflußgeschwindigkeit V ganz so, wie sie oben gefunden wurde.

100. Phenomen der Contraction. — Beobachtet man den Ausfluß des in einem, mit durchsichtigen Wänden versehenen, Gefäße enthaltenen Wassers, das zuvor mit Körperchen von beinahe gleichem specifischem Gewicht gemengt wurde, um dadurch dessen Bewegung sichtbar zu machen, so wird man wahrnehmen, daß die Elemente der Flüssigkeit sich in Kurven bewegen, in geringer Entfernung von der Oeffnung eine gegen dieselbe convergirende Richtung annehmen und ihre Bewegung um so schneller wird, je näher sie der Oeffnung kommen. Diese Bewegung findet auch noch eine kurze Strecke über die Oeffnung hinaus statt, was ein Zusammenziehen des ausfließenden Wasserstrahls zur Folge hat. Durch Versuche ist nachgewiesen, daß der Querschnitt dieses Strahls bis zu einem Abstand von der Oeffnung, die ohngefähr ein und einhalbmal so groß als die größte Breite derselben ist, sich vermindert. Diese Einziehung des Strahls nennt man dessen **Contraction**. Dieselbe wird um so geringer sein, je unbeträchtlicher die Abweichung der Wasserfäden von der vertikalen Axe LM (Fig. 293) ist. Auch vermindert sie sich, wenn die Oeffnung ab der einen oder andern Seitenwand AC oder BD genähert wird oder wenn man diese enger zusammenrückt. In dem Fall, wo die Oeffnung ab in einer vertikalen Wand AD (Fig. 294) angebracht ist, vermindert sich die Contraction nach Maßgabe, als der Wasserspiegel AB sich der Oeffnung nähert oder diese in geringerem Abstand von dem Boden angebracht ist. Sie wird gleichermassen geringer sein, wenn die Wände des Gefäßes, anstatt eben, nach aussen convex gestaltet sind (Fig. 295); hingegen wird sie beträchtlicher, wenn die Wand von aussen nach innen gegen die Oeffnung zu convex ist (Fig. 296). Endlich wird die Contraction die möglichst größte,

wenn die Oeffnung mittelst einer Röhre efgd (Fig. 297) in die Mitte des Gefäßes ABCD versetzt wird.

Borda hat für den letzten Fall durch Versuche gefunden, daß dann der Querschnitt der Contraction nur halb so groß als derjenige der Ausflußmündung ist. Da nun jener nie größer als dieser werden kann, so ist das Verhältniß des Querschnitts der Contraction zu dem Querschnitt der Oeffnung für alle möglichen Fälle zwischen den beiden Grenzen 1 und $\frac{1}{2}$ enthalten. Nimmt man hieraus das Mittel, so drückt 0,75 im Allgemeinen das mittlere Verhältniß aus.

101. Multiplicatoren der Ausflußmengen, wenn die Oeffnung in einer dünnen Wand angebracht ist. — Durch Versuche ist für kreisförmige Oeffnungen ebenfalls nachgewiesen, daß, wenn an diesen ein Röhrenstück (Fig. 298), das genau die Form des eingezogenen Strahls hat und noch etwas über diese Grenze hinaus verlängert ist, die für die äussere Oeffnung dieser Röhre berechnete Ausflußmenge beinahe eben so groß als diejenige sein wird, die man durch Messung des in einer Sekunde aus derselben äussern Oeffnung ausgeflossenen Quantums Wasser erhält. Daraus folgt, daß es im Allgemeinen hinreichend sein wird, den wirklichen Querschnitt der in dem Gefäße angebrachten Oeffnung durch den Contractionsquerschnitt zu ersetzen oder die Fläche f mit der Verhältnißzahl der Contraction — die man den Contractions-Coefficienten nennt — zu multipliciren. Auch die Beobachtung der springenden Strahlen zeigt, daß sich diese so hoch erheben, als ein Körper, der aus der Oeffnung mit der der Druckhöhe zugehörigen Geschwindigkeit in die Höhe steigen würde. Dem zu Folge kann man annehmen, daß die in dem Contractionsquerschnitt statt findende Geschwindigkeit diejenige ist, welche der Calcul angibt. Aber diese Folgerung ist nur in dem Falle richtig, wenn durch die Bewegung der Flüssigkeit keine lebendige Kraft verloren geht und dadurch die Geschwindigkeit in der Oeffnung nicht modificirt wird. Deswegen ist es nicht

in allen Fällen zulässig, die theoretische Ausflußmenge $f.V$ mit dem Contractions-Coefficienten zu multipliciren.

Wir nennen nun die Zahl, welche das wahre Verhältniß der wirklichen zur hypothetischen Ausflußmenge für eine gegebene Oeffnung und gegebene Druckhöhe ausdrückt, Multiplicator dieser Ausflußmenge und bezeichnen sie mit m. Demgemäß ist also die eigentliche Ausflußmenge

$$M = m.f.V.$$

Es ist nun noch anzugeben, wie der Werth von m zu- oder abnimmt, wenn sich die Dimensionen der Oeffnung verändern und die Druckhöhe größer oder kleiner wird.

In dieser Hinsicht ist durch Versuche gefunden worden, daß der Multiplicator m in allen ähnlichen Fällen derselbe bleibt; ebenso verändert sich derselbe nicht, wenn die Fläche f ein Quadrat, ein Rechteck oder ein Kreis (welche Formen diejenigen sind, die ausschließend in der Praxis vorkommen) ist, jedoch in der Voraussetzung, daß, wenn man kreisförmige Oeffnungen mit Rechtecken vergleicht, man die kleinste Dimension der rechtwinkeligen und den Durchmesser der kreisförmigen Oeffnung als Vergleichungszahlen annimmt. In gleichen Fällen ist also m von dieser kleinsten Dimension der rechtwinkeligen und von dem Durchmesser der kreisförmigen Oeffnung abhängig. Wenn aber diese Fälle sich verändern, namentlich wenn die Druckhöhe größer oder kleiner wird, so verändert sich auch m. Es verändert sich aber auch, je nachdem die Oeffnung näher oder entfernter von den Seitenwänden oder dem Boden des Gefäßes oder Reservoirs ist.

Nachstehende Tafel enthält nun für verschiedene Werthe der Druckhöhen und für verschiedene Dimensionen der Oeffnungen die Werthe von m.

Tafel der Multiplicatoren für die Ausflußmengen, wenn die Oeffnung in einer dünnen Wand angebracht und von allen Seiten isolirt ist.*)

Druckhöhe der Flüssigkeit über dem Mittelpunkt der Oeffnung.		Werthe von m, wenn die Oeffnungen nachbenannte kleinste Dimensionen haben.					
in Metern.	in Fußen.	0,2 Met. 0,64 Fuß.	0,1 Met. 0,32 Fuß.	0,05 Mt. 0,16 Fuß.	0,03 Mt. 0,1 Fuß.	0,02 Mt. 0,06 Fuß.	0,01 Mt. 0,03 Fuß
0,015	0,048						0,700
0,02	0,06				0,627	0,660	0,696
0,04	0,13			0,618	0,632	0,657	0,685
0,06	0,19		0,592	0,620	0,640	0,656	0,677
0,08	0,26		0,602	0,625	0,638	0,655	0,672
0,10	0,32	0,593	0,608	0,630	0,637	0,655	0,667
0,20	0,64	0,596	0,613	0,631	0,634	0,654	0,655
0,30	0,96	0,601	0,617	0,630	0,632	0,644	0,650
0,50	1,60	0,602	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
1,00	3,19	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,50	4,78	0,603	0,612	0,620	0,620	0,621	0,618
2,00	6,4	0,602	0,610	0,615	0,615	0,610	0,610
10,00	32.—	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600

*) Die zweite Colonne dieser Tafel gibt die Druckhöhe in (preuß.) Fußen an, mit denen die ebenfalls in Fußen ausgedrückten, kleinsten Dimensionen der Öffnungen correspondiren. Dieselben kann man für jedes andere, in Deutschland gebräuchliche Fußmaaß ohne vorherige Reduction annehmen, wenn die Druckhöhe 5—6 Fuß nicht übersteigt, und es sich nur darum

Bemerkungen zu vorstehender Tafel.

Für Gase ist die Druckhöhe immer größer als 2 Meter, weshalb man $m = 0{,}6$, oder in allen andern Fällen $m = 0{,}61$ nimmt.

---

handelt, den Multiplicator m bis auf 0,001 genau zu haben (was für alle Fälle der Praxis ausreichend ist).

Hätte man z. B. eine Öffnung, deren kleinste Dimension 0,4 bayer. Fuß beträgt und vor welcher das Wasser 5 bayer. Fuß hoch (von der Mitte der Öffnung an gemessen) steht, und soll den Multiplicator bestimmen, ohne zuvor eine Reduction des Maaßes vorzunehmen, so wird man die Rechnung folgendermassen führen: 0,4 liegt zwischen 0,64 und 0,32 Fuß, und die gegebene Druckhöhe (5 Fuß) kommt der mit 4,78 bezeichneten am nächsten. Man hat also für m die beiden Grenzwerthe 0,603 und 0,612, folglich ist

$$m = 0{,}603 + x.$$

Um x nach der in den Bemerkungen zu obiger Tafel angegebenen Weise zu erlangen, hat man

Unterschied zwischen 0,64 Fuß und 0,32 Fuß $= -0{,}32$
„ „ 0,64 „ „ 0,4 „ $= -0{,}24$
„ „ 0,603 „ „ 0,612 „ $= +0{,}009$

daher $$-0{,}32 : -0{,}24 = 0{,}009 : x,$$

hieraus $$x = \frac{-0{,}24 \cdot 0{,}009}{-0{,}32} = 0{,}00675$$

folglich $$m = 0{,}603 + 0{,}00675$$
$$= 0{,}60975. \qquad (1)$$

Will man hingegen den Werth von m nach vorausgegangener Reduction des Maaßes bestimmen, so hat man

0,4 bayer. Fuß = 0,117 Meter
5 „ „ = 1,459 „

0,117 Meter liegt zwischen 0,2 Meter oder 0,1 Meter, und die am nächsten liegende Druckhöhe ist 1,5 Meter, folglich die Zahlen 0,603 und 0,612 die beiden Grenzwerthe von m; es ist also

$$m = 0{,}603 + x.$$

Für Oeffnungen, deren kleinste Dimension größer als 0,2 Meter ist, nimmt man für m die in der dritten Colonne enthaltenen Werthe; hingegen für Oeffnungen, deren kleinste Dimension kleiner als 0,01 Meter ist, nimmt man die in der siebenten Colonne enthaltenen Werthe für m. Endlich für Oeffnungen, deren kleinste Dimension zwischen denen, die in der Tafel angegeben sind, liegt, bestimmt man sie auf folgende Weise.

Es sei z. B. die kleinste Dimension der Oeffnung 0,14 Meter und die Druckhöhe 0,5 Meter, so liegt 0,14 Meter zwischen 0,2 Meter und 0,1 Meter; in diesen beiden Colonnen hat man für die Druckhöhe 0,5 Meter, für m die Werthe 0,602 und 0,617. Der gesuchte Werth liegt also zwischen diesen und man hat somit

$$m = 0{,}602 + x.$$

Der Werth von x wird folgendermassen erlangt:

Unterschied zwischen 0,602 und 0,617 = 0,015 (1)
" " 0,2 " 0,1 = − 0,1 (2)
" " 0,2 " 0,14 = − 0,06 (3)

Um x zu erhalten, hat man
Unterschied zwischen 0,2 Meter und 0,1 Meter = − 0,1
" " 0,2 " " 0,117 " = − 0,083
" " 0,602 " " 0,612 " = + 0,009

daher $-0{,}1 : -0{,}083 = 0{,}009 : x$

und hieraus $x = \frac{-0{,}083 \cdot 0{,}009}{-0{,}1} = 0{,}00747$

folglich $m = 0{,}603 + 0{,}00747$

oder $m = 0{,}61047.$ (2)

Die Differenz zwischen (2) und (1) ist

$$0.61047 - 0{,}60975 = 0{,}00072$$

also noch nicht 0.001.

Man kann sich daher in den meisten Fällen der für das Fußmaaß angegebenen Zahlen zum schnellen Auffinden der Werthe des Multiplicators m bedienen, ohne erst eine Reduction des gegebenen Maaßes in ein anderes vornehmen zu müssen.

Aus den Werthen (1), (2), (3) und x bildet man die Proportion

$$- 0{,}1 : - 0{,}06 = 0{,}015 : x$$

hieraus erhält man $x = \frac{-0{,}06 \cdot 0{,}015}{-0{,}1} = 0{,}009,$

daher $m = 0{,}602 + 0{,}009 = 0{,}611.$

Die Tafel (Seite 372) ist aus den Versuchen, welche die französischen Ingenieur-Officiere Poncelet und Lesbros in den Jahren 1827 und 1828 unternahmen, gezogen und dieselbe stimmt mit den Ergebnissen der Versuche, welche früher durch Bossut, Michelotti und andere ausgezeichnete Hydrauliker und Physiker gemacht wurden, überein. Nur die Resultate, welche zu sehr kleinen Oeffnungen und sehr bedeutenden Druckhöhen gehören, sind zweifelhaft, jedoch beträgt die Ungewißheit nicht mehr als 0,001 und diese kleine Differenz ist unerheblich für die Praxis.

Oft findet der Fall statt, daß die Oeffnung sich sehr nahe an einer der Wandflächen des Reservoirs befindet oder eine Seite der Oeffnung selbst mit dieser zusammenfällt; die Contraction wird alsdann für diese Seite gleich Null, und der Multiplicator m dadurch ein wenig größer, als ihn die vorstehende Tafel angibt.

Wenn zwei Seiten der Oeffnung mit der Wandfläche des Reservoirs zusammenfallen, so wird die Contraction für zwei Seiten gleich Null und der Multiplicator m noch größer.

Die nachstehenden Resultate, die aus dem von Bidome in dieser Beziehung angestellten Versuche entnommen sind, geben für diese Fälle die mit m vorzunehmende Correction an. Bezeichnet man nämlich für dieselben den Multiplicator mit m_1, so ist, wenn die Contraction

an drei Seiten der Oeffnung statt findet $m_1 = (1 + 0{,}035)\,m$
„ zwei „ „ „ „ „ $m_1 = (1 + 0{,}072)\,m$
„ einer Seite „ „ „ „ $m_1 = (1 + 0{,}125)\,m$

In der Praxis kommt der Fall nicht vor, wo die Contraction für die vier Seiten gleich Null wird.

Alle in Vorstehendem erhaltenen Resultate gelten nur in der Voraussetzung, daß die Flüssigkeit frei aus der Oeffnung, und ohne diese an irgend einer Stelle andauernd zu berühren, ausströmt.

102. Wassermenge bei Ueberfällen. — Die in Vorstehendem erlangten Ergebnisse sind nur dann anwendbar, wenn die Oeffnung von allen Seiten geschlossen ist. Es findet aber in der Praxis oft der Fall statt, daß eine rechtwinkelige Oeffnung oberhalb nicht geschlossen ist. Eine solche Oeffnung in einer Wand nennt man einen Ueberfall. Derselbe befindet sich in der Regel in der Nähe des Wasserspiegels AB (Fig. 299) in einer senkrechten Wand. Man kann nun für diese Oeffnung die Ausflußmenge ebenso berechnen, wie im vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde, jedoch mit der Voraussetzung, daß man den Coefficienten der Formel nach dem, was die Erfahrung angibt, verändert. Ist also l die Breite des Ueberfalls und die Höhe BC (von dem Wasserspiegel bis zur Schwelle C gemessen) gleich H, so ist $BI = h = \frac{H}{2}$ die Druckhöhe, und wenn man die mittlere Geschwindigkeit mit V bezeichnet *), so hat man

$$V^2 = 2gh = 2g.\frac{H}{2} = \frac{1}{2}(2g.H),$$

folglich

$$V = 0{,}707 . \sqrt{2g.H}.$$

*) Diese mittlere (theoretische) Geschwindigkeit kann auch folgendermassen gefunden werden.

Es stehe vor der Wand AB (Fig. 300) das Wasser von B bis A und in derselben sei von oben nach unten ein verticaler Einschnitt angebracht, durch welchen das Wasser in jedem Punkte, z. B. in m und B, mit einer Geschwindigkeit v und v ausfließt, die der Druckhöhe $Am = h$ und $AB = H$ entspricht, so daß also

Die hypothetische Ausflußmenge ist daher

$$M = l . H . V = 0{,}71 . l . H . \sqrt{2g . H}. \quad (\alpha)$$

$$v = \sqrt{2g . h} \;;\; V = \sqrt{2g . H}$$

ist. Die Werthe $\sqrt{2g . h}$, $\sqrt{2g . H}$ drücken aber die Ordinaten einer Parabol aus, deren Parameter gleich 2g ist. Daher kann die Geschwindigkeit für jeden Punct des Einschnittes AB durch eine solche Ordinate ausgedrückt werden und die theoretische Wassermenge (die Ausflußmenge in einer Sekunde) ist dem Flächeninhalt der Parabol ADB proportional; da dieser gleich $\frac{2}{3} \times AB \times BB = \frac{2}{3} H . \sqrt{2g . H}$ ist, so erhält man die aus dem Einschnitt strömende theoretische Wassermenge, wenn man dessen Breite mit l bezeichnet, gleich

$$\frac{2}{3} . l . H . \sqrt{2g . H}. \quad (1)$$

Drückt man jetzt die mittlere Geschwindigkeit durch V_0 und die zugehörige Druckhöhe durch h_0 aus, so ist

$$V_0 = \sqrt{2g . h_0}$$

und die mit dieser Geschwindigkeit ausströmende Wassermenge gleich

$$l . H . \sqrt{2g . h_0} \quad (2)$$

Es muß aber augenscheinlich (1) gleich (2) sein; daher hat man

$$\frac{2}{3} l . H . \sqrt{2g . H} = l . H . \sqrt{2g . h_0}$$

und hieraus $\qquad h_0 = \frac{4}{9} H;$

also $\qquad V_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2g . H}.$

Es ist also die hypothetische Ausflußmenge

$$M = l . H . v_0 = \frac{2}{3} l . H . \sqrt{2g . H}$$

Dieser erhaltene Werth ist von dem in (α) erhaltenen nur in den Zahlen-Coefficienten verschieden, und da man für diesen einen andern, durch die Erfahrung bestimmten Werth m_1 zu substituiren hat, so ist die wirkliche Ausflußmenge

$$M = m_1 . l . H . \sqrt{2g . H}$$

wie in (β).

Dieselbe muß noch mit einem Coefficienten, dessen Werth durch Versuche ermittelt worden ist, multiplicirt werden; bezeichnet man den dadurch entstehenden neuen Zahlen-Coefficienten mit m_1, so ist

$$M = m_1 . l . H . \sqrt{2g . H}. \qquad (\beta)$$

Nach den Versuchen von Poncelet und Lesbros enthält folgende Tafel die Werthe von m_1 *).

Höhe von dem Wasserspiegel bis zur Schwelle des Ueberfalles oder H. In Metern.	In Fußen.	Werthe von m_1.
0,01	0,03	0,424
0,02	0,06	0,417
0,03	0,10	0,412
0,04	0,13	0,407
0,06	0,19	0,401
0,08	0,25	0,397
0,10	0,32	0,395
0,15	0,48	0,393
0,20	0,64	0,390

Als Mittelwerth, der für viele Fälle hinreichend genau sein wird, erhält man

$$m_1 = 0{,}405,$$

folglich

$$M = 0{,}405 . l . H . \sqrt{2g . H}.$$

Wenn die Schwelle C des Ueberfalls und die Bodenfläche des Reservoirs in einerlei Ebene liegt, so wird die vorstehende Formel die Wassermenge zu klein angeben; in diesem Falle

*) In dieser Tafel gilt für die mit Fußen bezeichnete Colonne, dieselbe Bemerkung, die bereits in der auf Seite 372 enthaltenen Anmerkung gemacht worden ist.

kann sich der Werth des Coefficienten m, bis zu 0,45 erheben. Dieselbe Formel wird im Gegentheil die Wassermenge zu groß angeben, wenn die Mündung des Ueberfalls durch ein Gerinne, das wenig Fall hat, verlängert ist. Diese Fälle bieten sich jedoch in der Praxis sehr selten dar und geben uns somit keine Veranlassung, uns damit zu beschäftigen.

Bei der vorstehenden Bestimmung der Wassermenge, welche ein Ueberfall gibt, ist vorausgesetzt worden, daß der Wasserspiegel unverändert bis in die Oeffnung seine horizontale Lage behält; dies ist jedoch in der Wirklichkeit nicht der Fall, indem derselbe in kurzem Abstand von der Oeffnung anfängt sich abwärts zu krümmen, und eine parabolische Oberfläche annimmt (Fig. 301), weshalb nicht in der ganzen Höhe **H** die Oeffnung mit Wasser erfüllt ist. Jedoch braucht man bei der Bestimmung der Wassermenge darauf keine Rücksicht zu nehmen, wenn die Höhe **H** so genommen wird, daß dieselbe genau dem Abstand **AA**, zwischen dem Wasserspiegel **AB** und der durch die Schwelle **C** gelegten horizontalen Ebene **A,C** gleich ist, indem schon durch den Coefficienten m, der durch die Senkung des Wasserspiegels entstehende Fehler corrigirt wird.

103. Ausflußmenge durch eine in einer dicken Wand angebrachte Oeffnung oder durch eine kurze Ansatzröhre. — Die bis jetzt dargestellte Theorie des Ausflusses und die zur Correction derselben aus der Erfahrung gefolgerten Ergebnisse beziehen sich ausschließend auf den Fall, wo der Ausfluß aus einer in einer dünnen Wand angebrachten Oeffnung oder aus einer solchen statt findet, wo der Strahl, ohne die Fläche der Oeffnung zu berühren, ausströmt. Wir nennen eine dünne Wand eine solche, deren Dicke die kleinste Dimension der Oeffnung, ein bis anderthalbmal genommen, nicht übertrifft. Wenn hingegen die Dicke derselben zwei bis dreimal größer als diese kleinste Dimension der Oeffnung ist, so nennen wir sie eine dicke Wand. Wir wollen

nun den Ausfluß aus einer Oeffnung betrachten, die in einer dicken Wand angebracht, oder die durch eine prismatische oder cylindrische Ansatzröhre (Fig. 302) bis zu der oben angegebenen Größe verlängert ist.

Die Ergebnisse werden in beiden Fällen dieselben sein, wenn das ausfließende Wasser die ganze innere Fläche der Oeffnung oder der Ansatzröhre berührt und folglich die äußersten, mit dieser Fläche in Berührung kommenden, Wasserfäden eine parallele Richtung haben. Einen auf diese Weise statt findenden Ausfluß nennt man den vollen Ausfluß aus einer Oeffnung.

Durch Versuche ist gefunden worden, daß für Oeffnungen von $\frac{3}{8}$ Zoll bis 8 Zoll (1 bis 20 Centimeter) und einer Druckhöhe von 5 Fuß (1,5 Meter) und darüber der mittlere Werth des Multiplicators m gleich 0,82 und also die Ausflußmenge

$$M = 0{,}82 \,.\, f \,.\, \sqrt{2gh}$$

ist. Für dieselben Umstände ist, wenn die Oeffnung sich in einer dünnen Wand befindet, $m = 0{,}61$. Wir werden in dem folgenden Abschnitt (107) sehen, wie man den Werth des Multiplicators erlangt, wenn die Umstände von den hier betrachteten verschieden sind.

Bringt man statt der cylindrischen oder prismatischen Ansatzröhren eine konische Ansatzröhre an der Oeffnung ab (Fig. 303) an, deren Dimensionen so genommen sind, daß sie die Form des eingezogenen Strahls hat, d. h. daß die Seite oder der Durchmesser von der Mündung a'b', 0,8 von derjenigen ab beträgt und ik ein oder zweimal so groß als ab ist, so wird in dem Fall, daß man in der Rechnung a'b als Ausflußmündung (gleich f) annimmt, der Multiplicator $m = 0{,}95$, und die Ausflußmenge

$$M = 0{,}95 \,.\, f \,.\, \sqrt{2gh}.$$

Ist das Verhältniß der Seiten ab und a′b′ kleiner oder größer, als in dem vorliegenden Falle angenommen wurde, so ist m kleiner als 0,95 und je geringer der Unterschied zwischen diesen beiden Größen ist, desto mehr wird sich m dem für cylindrische Ansätze gefundenen Werth 0,82 nähern *).

Den Hergang des vollen Ausflusses kann man sich leicht erklären, wenn man erwägt, daß in diesem Falle

---

*) Die obigen Coefficienten 0,82 und 0,95 gelten nur für den Wasserausfluß aus cylindrischen oder konischen Ansatzröhren. Für die Ausflußmenge der atmosphärischen Luft aus ähnlichen Röhrenansätzen ändern sich dieselben nach den Versuchen von D'Aubisson dahin ab, daß man für

cylindrische Röhren $m = 0{,}93$
konische " $m = 0{,}94$

hat. Da unter diesen von D'Aubisson angestellten Versuchen viele sind, wo der für m erlangte Werth sowohl für cylindrische, als konische Ansatzstücke nahe an 0,9 liegt, so wird

$$M = 0{,}9 \,.\, f \,.\, \sqrt{2g\left(\frac{p-p'}{\gamma}\right)}$$

ziemlich genau die Ausflußmenge der atmosphärischen Luft aus cylindrischen oder konischen Ansatzröhren für die Praxis angeben, wenn der Unterschied der Drückungen p und p′ geringer als $\frac{1}{10}$ ist. Haben aber p und p′ solche Werthe, daß sich ihr Unterschied größer als $\frac{1}{10}$ ergibt, so hat man statt $\sqrt{2g\,\frac{p-p'}{\gamma}}$ den Seite 363 für die Geschwindigkeit V gefundenen Ausdruck (δ) zu substituiren, in welchem Fall dann

$$M = 0{,}9 \,.\, f \sqrt{\frac{g}{3\gamma} \,.\, \frac{p-p'}{p'}\left(p + \frac{8p \,.\, p'}{p+p'} + p'\right)}$$

ist und die in dieser und der vorhergehenden Gleichung enthaltene Größe γ nach der in der Anmerkung (Seite 359) angegebenen Weise zuvor berechnet werden muß.

die Ausflußmenge durch eine doppelte Wirkung abgeändert wird; einmal durch die Anziehung der innern Fläche der Ansatzröhre, und das anderemal durch die Contraction des Strahles. Jene strebt, die Ausflußmenge zu vermehren, diese, sie zu vermindern. Hat die Ansatzröhre genau die die Form des zusammengezogenen Strahls, so findet ausserhalb der Mündung keine weitere Contraction statt, und da dennoch die vollständige hypothetische Wassermenge nicht erhalten wird, sondern nur

$$0{,}95 \cdot \sqrt{2g \cdot h} \cdot f = \sqrt{2g \cdot 0{,}9\,h} \cdot f,$$

so findet durch die Anziehung der innern Röhrenfläche und — wie wir später sehen werden — auch durch die in Folge der Bewegung der Flüssigkeit entstehende Reibung eine Minderung der Geschwindigkeit und zwar in einem solchem Grade statt, daß dadurch 0,1 der disponiblen Druckhöhe oder ein Zehntel der Arbeit der Schwere verloren geht. Bei cylindrischen Ansatzröhren, wo der Strahl bei seinem Eintritt in das Innere der Röhre zuerst eingezogen wird, dann in Folge der Anziehung der Röhrenwand sich wieder auseinanderbreitet und dieselbe berührend austritt, geschieht die Verminderung der Wassermenge durch die Contraction und die Anziehung zugleich, indem diese

$$0{,}82 \cdot \sqrt{2g \cdot h} \cdot f = \sqrt{2 \cdot g \cdot 0{,}67\,h} \cdot f$$

ist, und also ein Verlust an der Arbeit der Schwere statt findet, die $\frac{1}{3}$ der gegebenen Druckhöhe entspricht.

Die lebendige Kraft, welche das Wasser bei seinem Austritt aus der Mündung der Röhre besitzt, ist in beiden Fällen den Größen

$$(0{,}95)^2 \cdot V^2 \text{ und } (0{,}82)^2 \cdot V^2$$

oder da $(0{,}95)^2$ nahe $= \frac{9}{10}$

$(0{,}82)^2$ „ $= \frac{2}{3}$

denjenigen $\frac{9}{10} \cdot V^2$ und $\frac{2}{3} \cdot V^2$ proportional; so daß also für die konischen Röhren dieser Verlust $\frac{1}{10}$ und für die cylindrischen Röhren $\frac{1}{3}$ beträgt.

Die Ursache dieses Verlustes an lebendiger Kraft ist theils in dem Reibungswiderstand, welcher zwischen der sich durch die Röhre bewegenden Flüssigkeit und der innern Röhrenfläche entsteht und der sich mit der Zunahme der Länge der Röhre vermehrt, theils in den Stößen der Wasserelemente, welche beim Eintritt derselben aus dem Reservoir in die Oeffnung stattfinden, und welche den Verlust von einem Theil der bewegenden Kraft veranlassen, zu suchen. Wir werden in dem folgenden Abschnitt (§. 107) zeigen, wie diese Verluste gemessen werden können.

104. Ausflußmenge durch ein angesetztes, sehr kurzes, unbedecktes Gerinne. — Oft findet der Fall statt, daß die Ausflußmündung ausserhalb durch ein angesetztes Gerinne verlängert ist. Die rechtwinkelige Oeffnung, durch welche das Wasser in dieses Gerinne eintritt, wird gewöhnlich durch ein Schutzbrett, dessen Dicke, in Vergleichung mit den Dimensionen der Oeffnung, immer sehr geringe ist, geöffnet oder geschlossen, weshalb die Contraction von allen Seiten vollständig statt findet. In der Voraussetzung, daß dieses Gerinn sehr kurz und hinreichend genug geneigt ist (Fig. 304), damit die Flüssigkeit frei über dasselbe weggleiten kann, bestimmt sich die Wassermenge gerade so, als wenn das Gerinne nicht vorhanden wäre und das Wasser sich frei in die Luft ergöße.

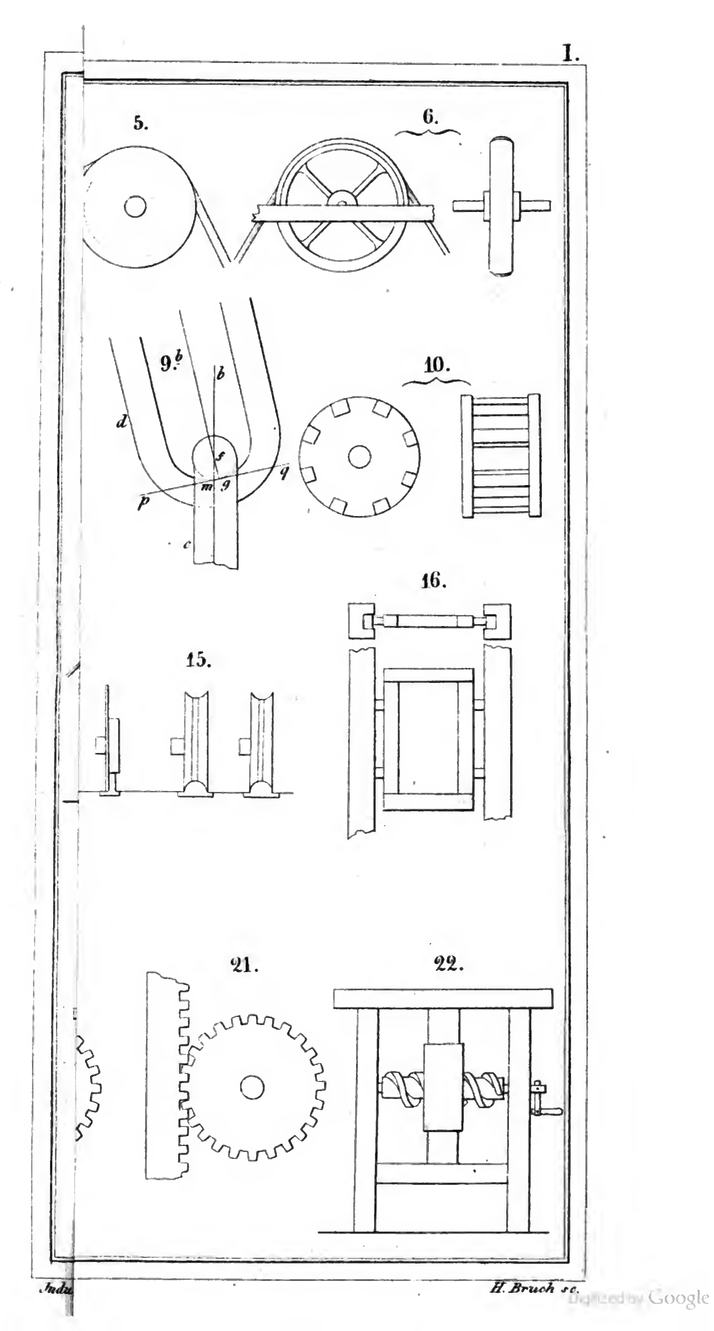
Wenn sich hingegen diesem freien Ausfluß Hindernisse entgegensetzen, wie z. B., wenn das Gerinne eine horizontale Lage hat, so wird das Wasser, sowie es aus der Oeffnung getreten ist, aufwirbeln, sich aufstauchen und die Form annehmen, wie es Fig. 305 zeigt.

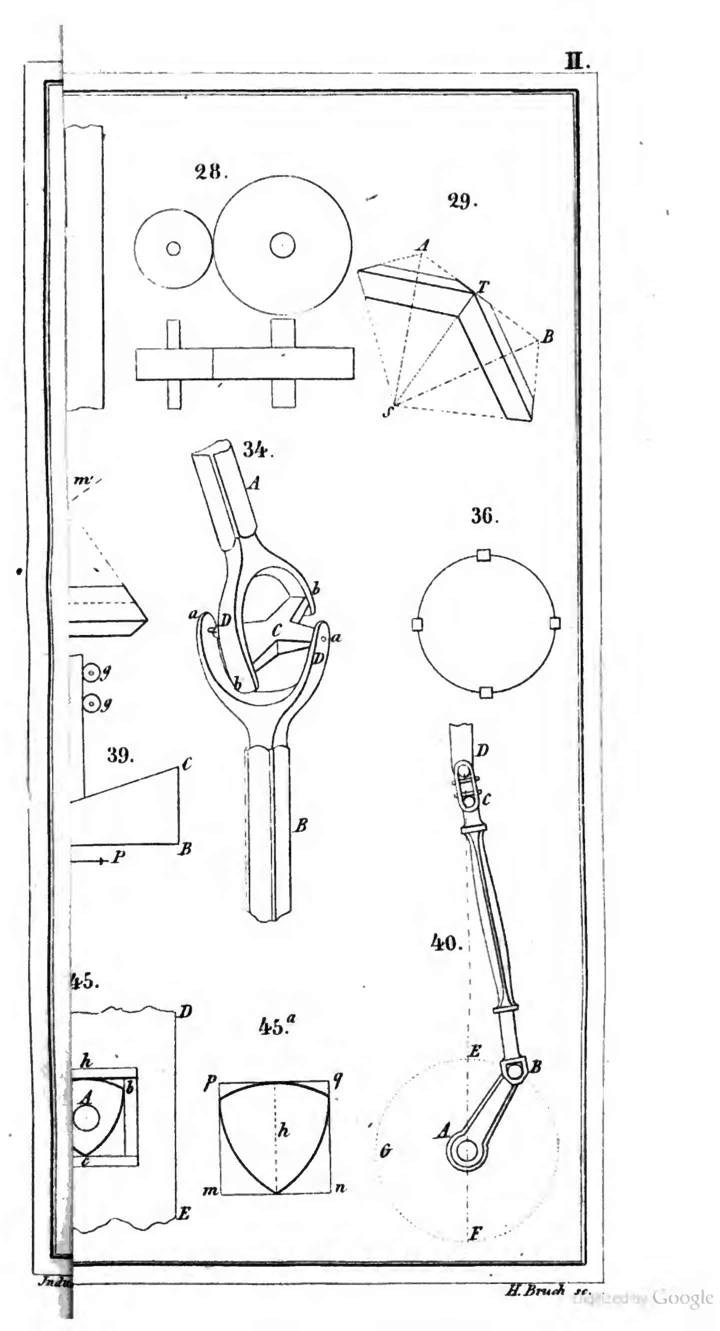
Die auf diese Weise gebildete Erhöhung u der Flüssigkeit verbreitet sich öfters rückwärts bis nahe an die Oeffnung und bedeckt den zusammengezogenen Strahl. Die Contraction ist dann nicht mehr sichtbar, es entsteht ein äusserer Druck gegen die Oeffnung, und die Ausflußmenge, sowie die Geschwindigkeit ist dadurch gleichzeitig verändert. In einem solchen

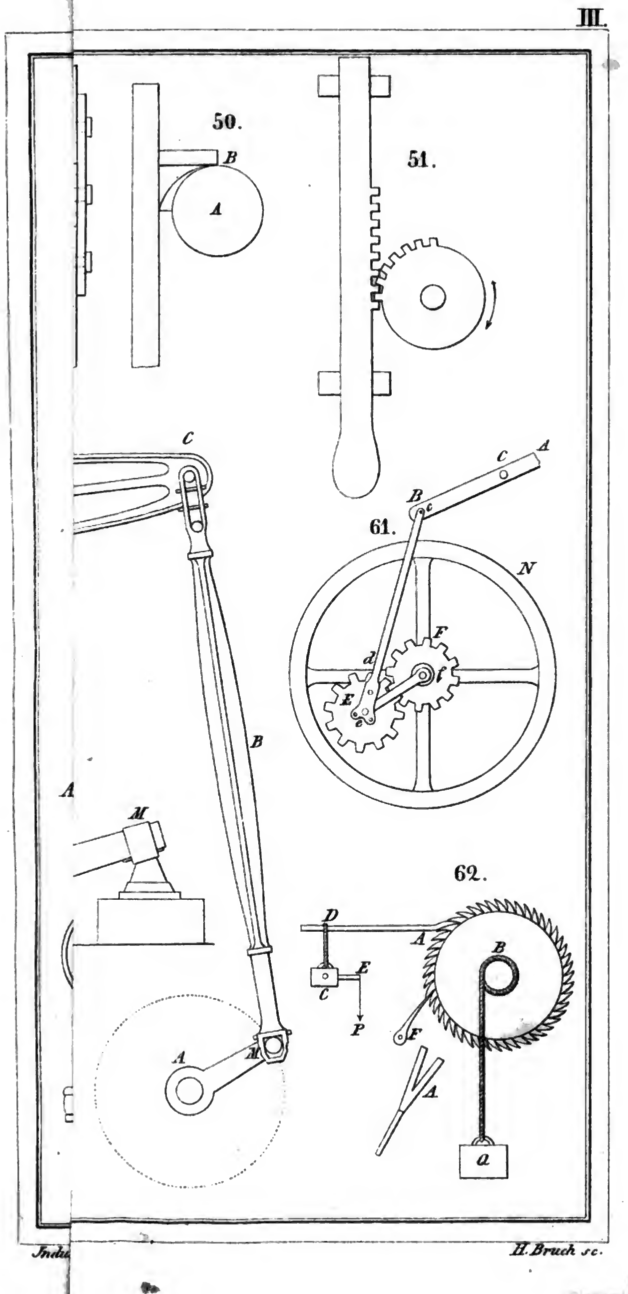
Falle ist dann in der Berechnung der Geschwindigkeit V die zugehörige Druckhöhe h, um die mittlere Aufstauchung des Wassers vor der Oeffnung im Gerinne zu vermindern, so daß, wenn die Höhe der Aufstauchung, von dem Mittelpunkt der Oeffnung aufwärts gemessen, mit h' bezeichnet wird, die Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{2g\,(h - h')}$$

sein wird. Die Wassermenge wird erhalten, wenn diese Geschwindigkeit mit dem Querschnitt der Oeffnung und demjenigen aus der Tafel Seite 372 entnommenen Multiplicator multiplicirt wird, welcher der kleinsten Dimension der Oeffnung und der Druckhöhe h — h' entspricht.

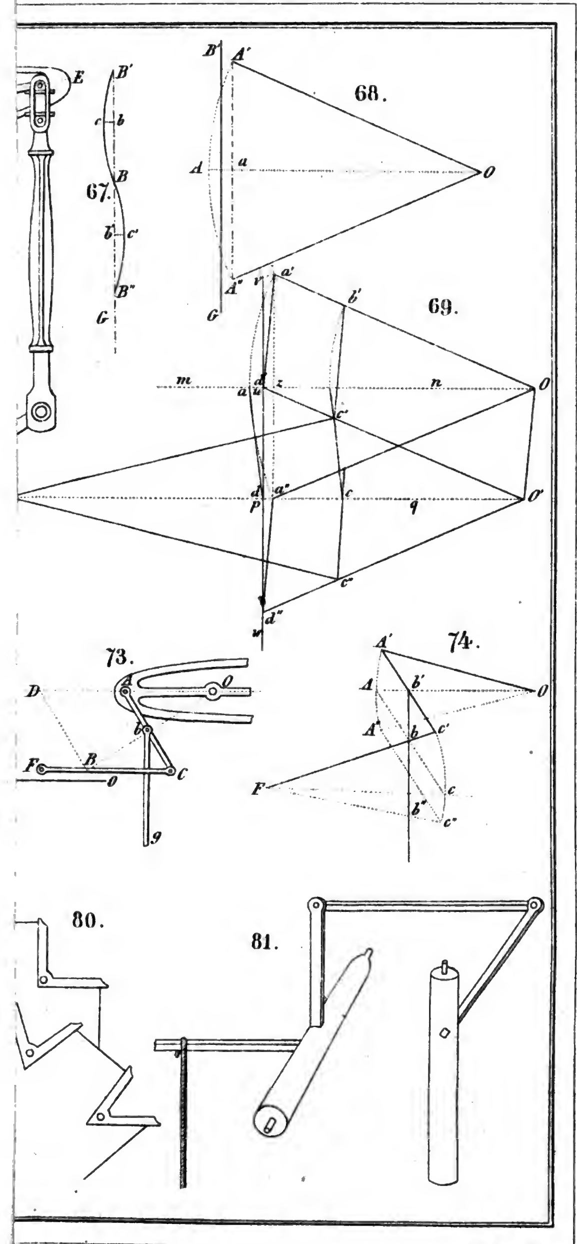

I.
5.
6.
9.b
b
d
f
q
m
g
p
c
10.
16.
15.
21.
22.
H. Bruch sc.


28.
29.
A
T
B
S
34.
A
b
a
D
C
a
D
b
B
36.
39.
C
B
P
g
g
m
D
C
40.
B
E
A
G
F
45.
D
h
b
A
c
E
45.a
p
q
h
m
n
Ind
H. Bruch sc.



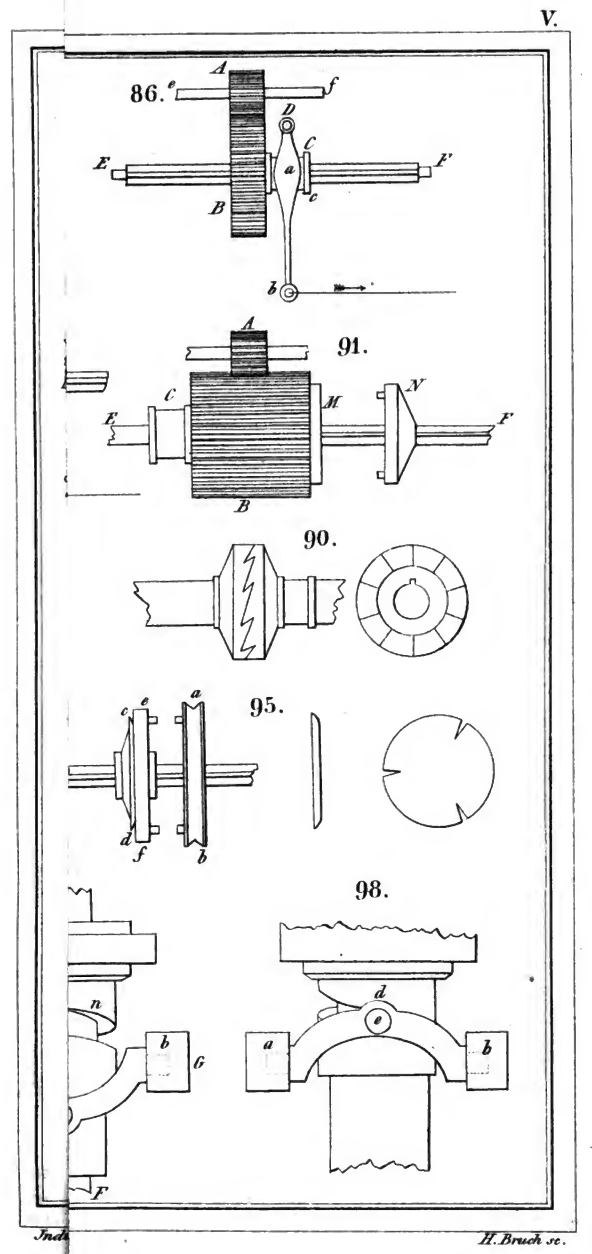
Jndu

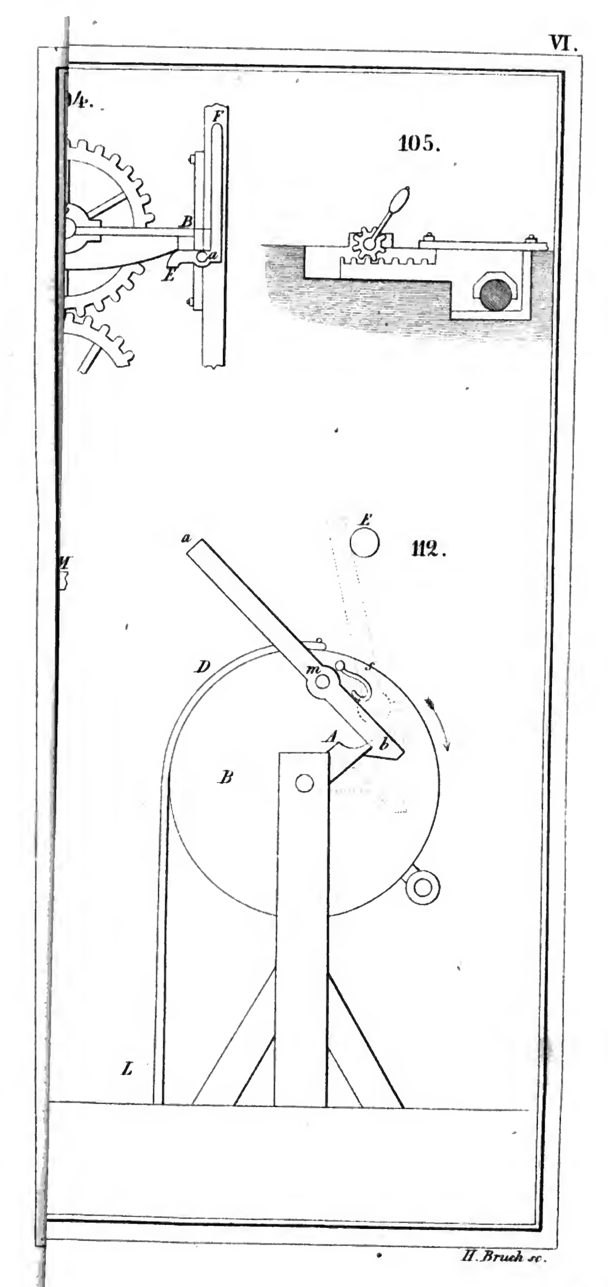
H. Bruch sc.



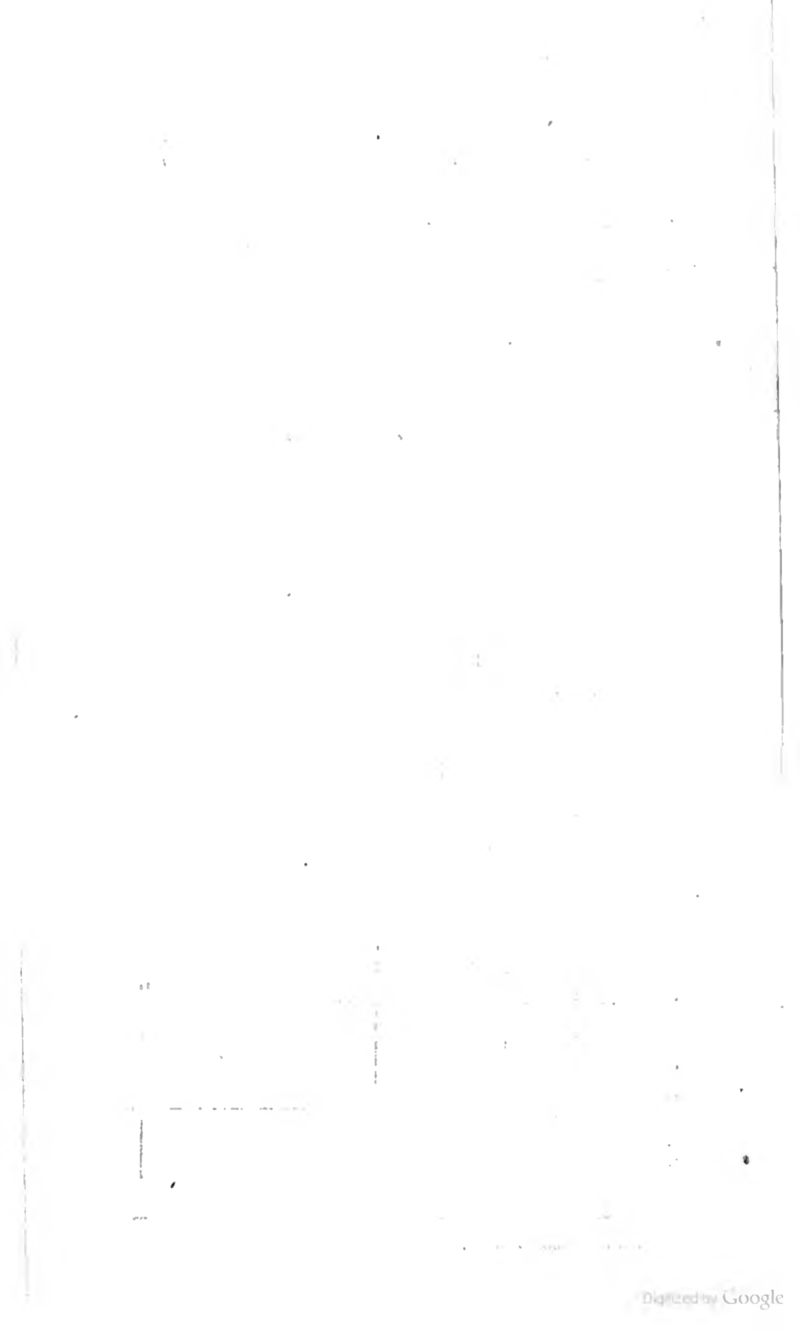
H. Bruch sc.

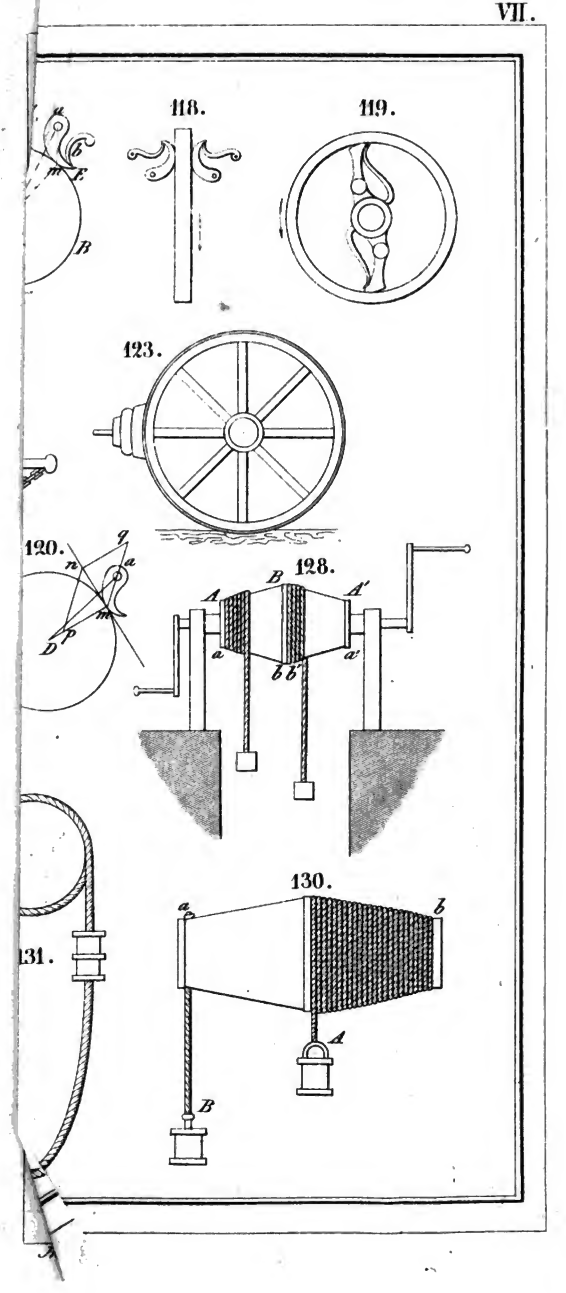
V.

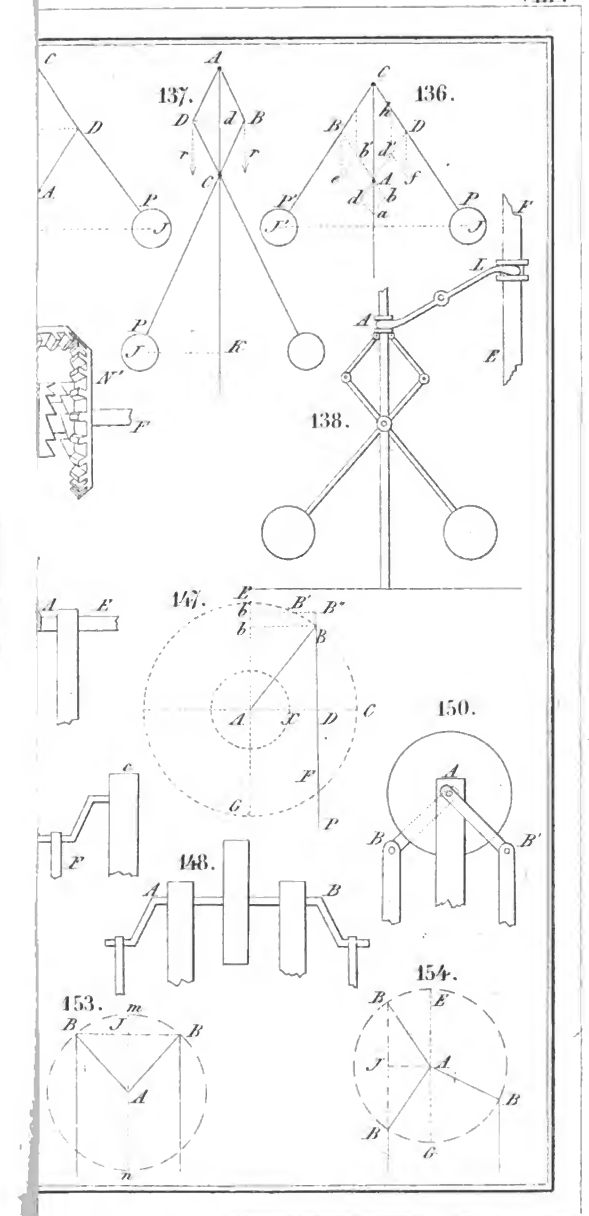

86.
e
f
A
D
C
E
F'
a
c
B
b
A
91.
C
M
N
E
F'
B
90.
95.
c
e
a
d
f
b
98.
n
b
G
F
d
e
a
b
Jnd
H. Bruch sc.

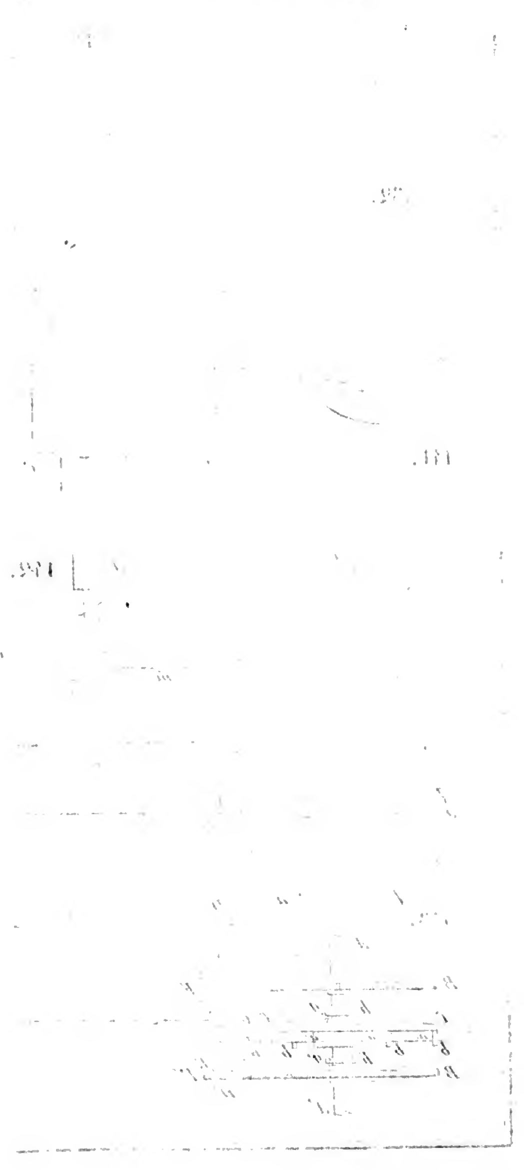


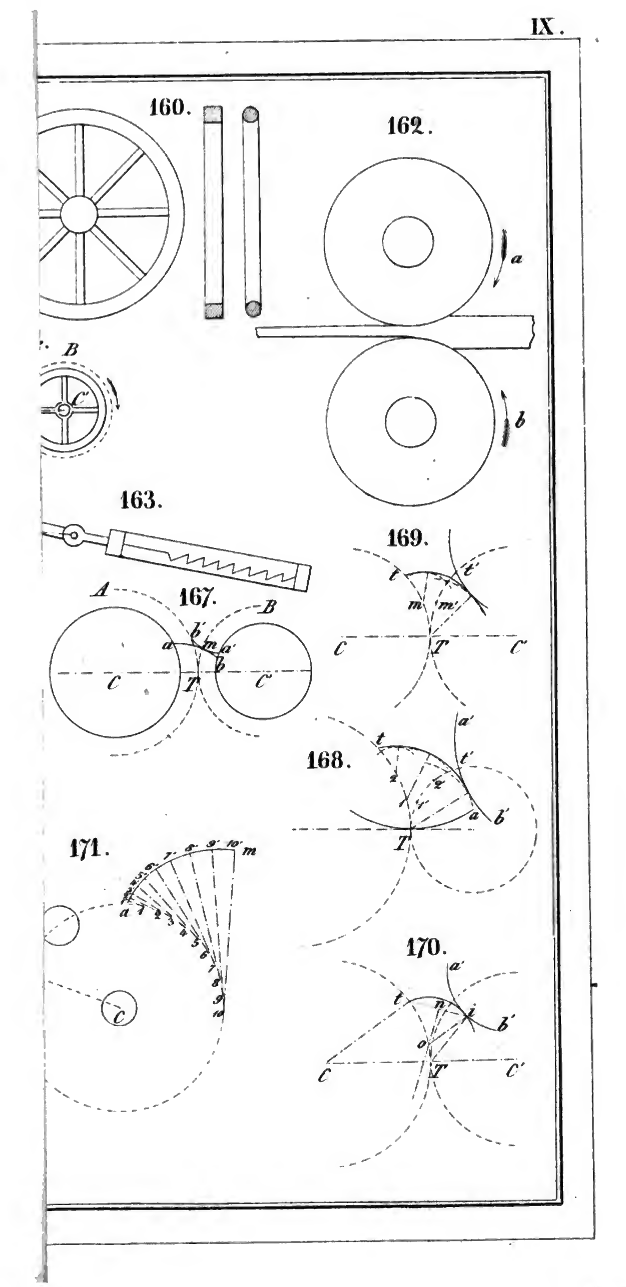
H. Bruch sc.

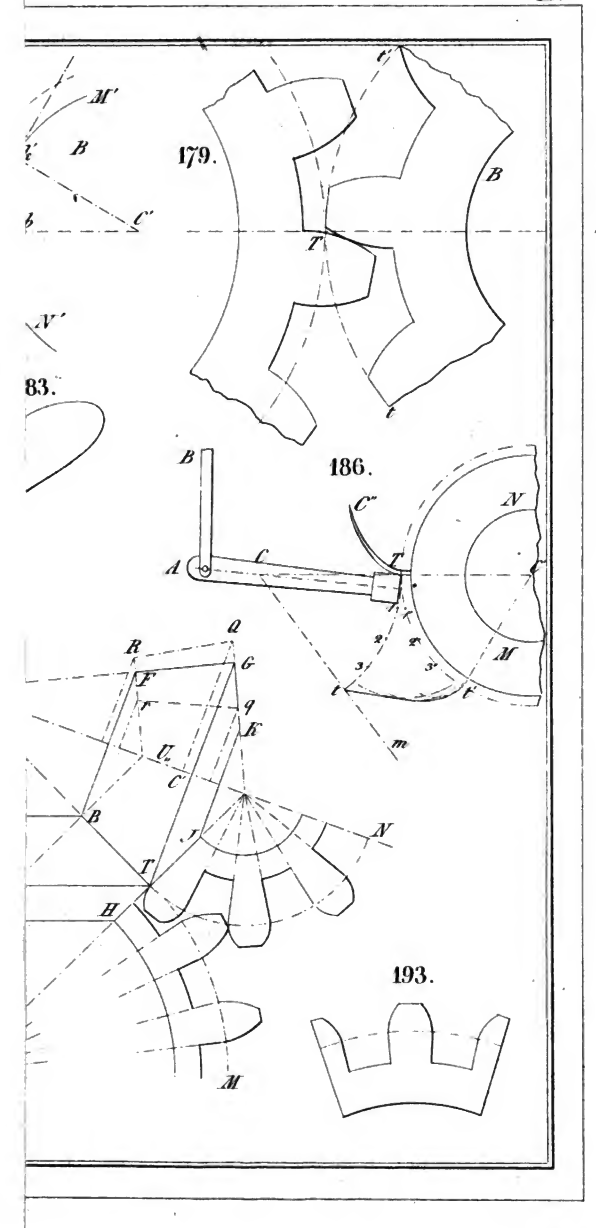


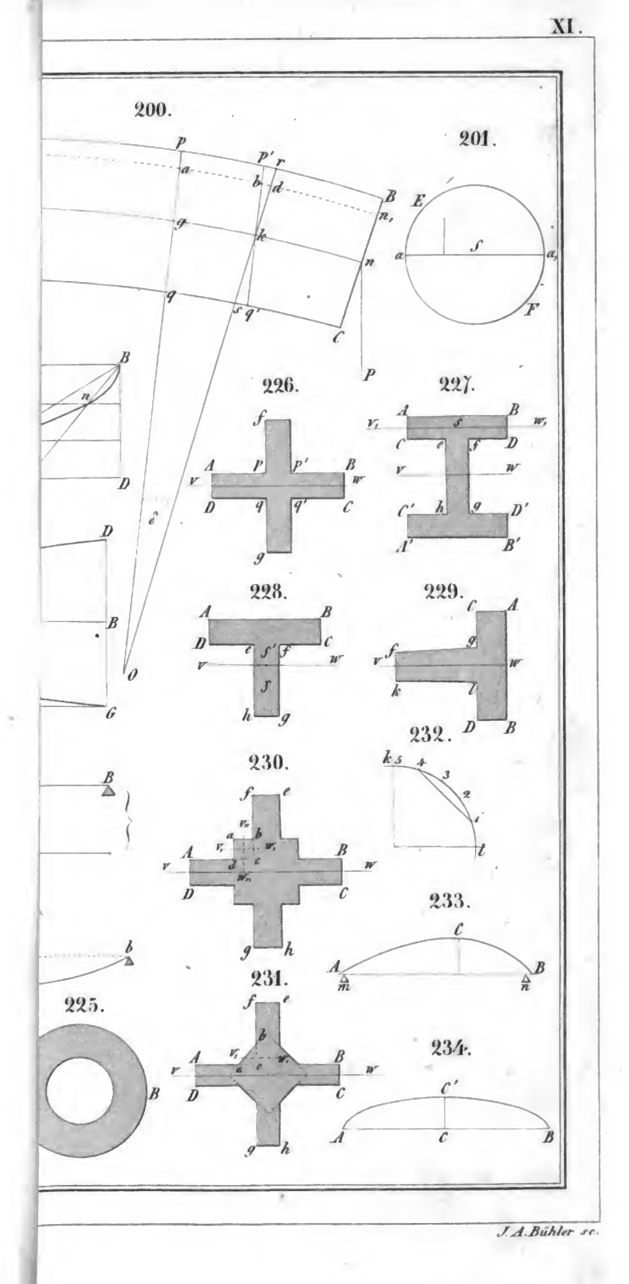

118.
119.
123.
120.
q
n
a
m
p
D
128.
B
A
A'
a
a'
b b'
130.
a
b
A
B
131.


137.
136.
138.
147.
150.
148.
153.
154.

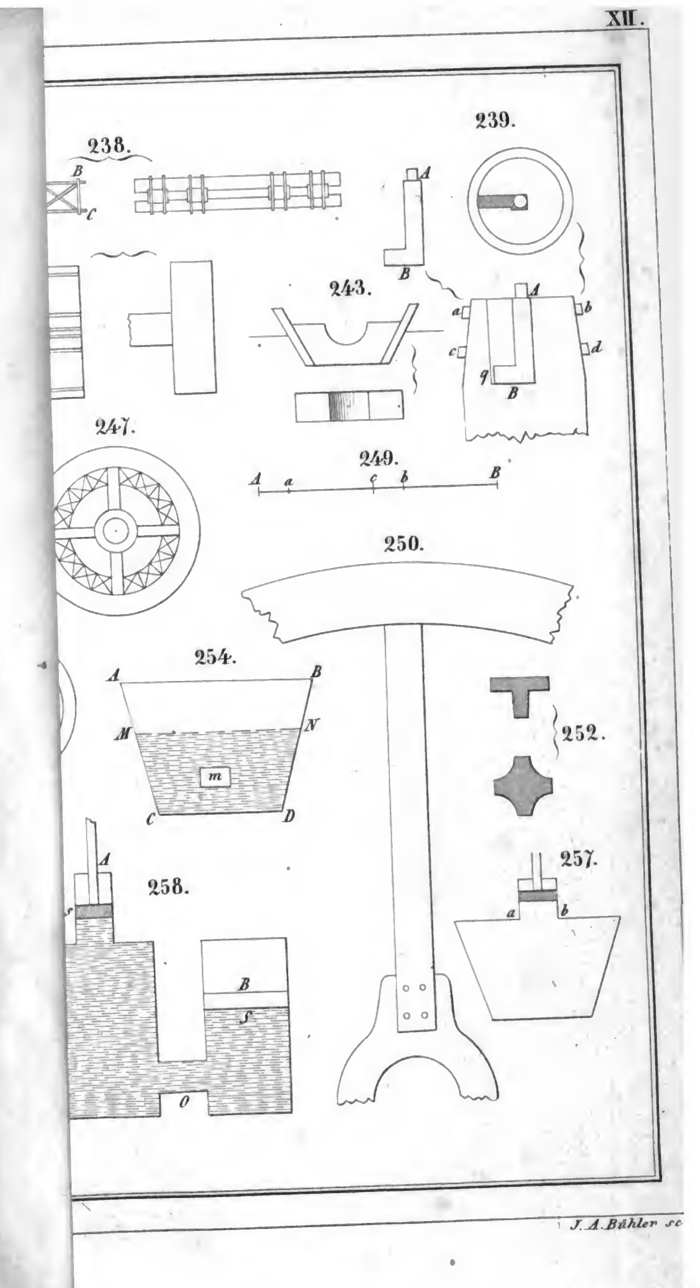



160.
162.
a
b
B
C
163.
A
167.
B
b'
a
m
a'
b
C
T
C'
169.
t
t'
m
m'
C
T
C'
168.
t
a'
t'
T
a
b'
171.
m
a
c
170.
a'
t
n
i
b'
o
C
T
C'


179.
B
T
t'
t
83.
M'
B
C'
N'
186.
B
A
C
C''
T
N
C'
M
t
t'
m
Q
R
G
F
q
K
U
C
B
N
T
H
M
193.



J.A.Bühler sc.


238.
B
C
239.
A
B
A
a
b
c
d
q
B
243.
247.
249.
A
a
c
b
B
250.
254.
A
B
M
N
m
C
D
252.
257.
a
b
A
s
258.
B
S
o
J. A. Bühler sc

